

מודלים חישוביים

תרגול מס' 10

4 ביוני 2015

נושאי התרגול:

- משפט Rice ועוד רדוקציות.

1 משפט Rice ועוד רדוקציות

נזכיר את משפט Rice:

משפט 1.1 תהא C תת קבוצה לא טריוויאלית של RE ותהא $L_C = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in C \}$. אזי, $L_C \notin R$.
מתי C היא תכונה (או, תת קבוצה) לא טריוויאלית? אם קיימות L_1 ו- L_2 כך ש- $L_1 \in C$ ו- $L_2 \notin C$. התכונה גם צריכה להיות תכונה של שפות. כלומר, אם $L(M_1) = L(M_2)$ אז $M_1, M_2 \in L_C$ או $M_1, M_2 \notin L_C$. אם כך, עבור הדוגמאות הבאות, האם ניתן להשתמש במשפט רייס?

- עבור השפה $\{ \langle M \rangle \mid L(M) \in RE \}$? לא, כי התכונה טריוויאלית (וגם השפה ב- R).
- עבור השפה $A_{TM, \epsilon} = \{ \langle M \rangle \mid \epsilon \in L(M) \}$? כן, התכונה, כמובן, היא $C = \{ L \in RE \mid \epsilon \in L \}$. זוהי אינה תכונה טריוויאלית, שכן $\emptyset \notin C$ אך $\Sigma^* \in C$.
- עבור השפה $\{ \langle M \rangle \mid M \text{ halts on } 101 \}$? לא, כי זו אינה תכונה של שפות.
- עבור השפה $\{ \langle M \rangle \mid M \text{ accepts } 101 \}$? כן, זוהי תכונה לא טריוויאלית של שפות.
- עבור השפה $\{ \langle M \rangle \mid M \text{ always halts} \}$? לא, כי זו אינה תכונה של שפות (למשל, ישנן שתי מ"ט M_1, M_2 כך ש- $L(M_1) = L(M_2) = \emptyset$ אך אחת עוצרת והשנייה לא).

תרגיל 1

הוכיחו כי $L_R = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in R \} \notin R$.

פתרון

נזכור כי

$$H_{TM} = \{ \langle M \rangle, w \mid M \text{ is a TM that halts on } w \} \in RE \setminus R$$

אם כך, נגדיר את התכונה $C = \{ L \subseteq \Sigma^* \mid L \in R \}$. C אינה טריוויאלית, כי $H_{TM} \notin C$ ו- $\Sigma^* \in C$. לכן, לפי משפט רייס:

$$L_C = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \in C \} = L_R \notin R$$

תרגיל 2

הוכיחו כי $L_R \notin coRE$.

פתרון

תהא M_ϵ שעל קלט $\langle M \rangle$ מסמלצת את M על ϵ ועונה כמוהה. נראה כי $H_{TM} \leq_m L_R$. נרצה למצוא פונקציה חשיבה $M' = f(\langle M \rangle, w)$ כך ש- M עוצרת על w אם"ם $L(M') \in R$. על קלט x :

1. מריצה את M על w למשך $|x|$ צעדים.
2. אם M עצרה אז M' דוחה.
3. אם M לא עצרה, הרץ את M_ϵ על x ואם M_ϵ עצרה, M' תענה כמוהה.

נכונות:

- f חשיבה.
- אם M עוצרת על w אזי קיים k כך ש- M עוצרת על w תוך k צעדים. אזי, לכל x ש- $|x| \geq k$, M' דוחה את x . מכאן, ש- $L(M') \in R$ סופית ו- $L(M') \in R$.
- אם M לא עוצרת על w אז $L(M_\epsilon) \notin R$. מכיוון שידוע ש- $L(M_\epsilon) \notin R$, הרי ש- $L(M') \notin R$.

תרגיל 3

הוכיחו כי $L = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ is a CFL}\} \notin RE \cup coRE$.

פתרון

נראה כי $H_{TM} \leq_m L$ (ואז $L \notin coRE$) ו- $\overline{H_{TM}} \leq_m L$ (ואז $L \notin RE$).

הכיוון $H_{TM} \leq_m L$ תהא M_{abc} מ"ט המכריעה את השפה $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \in R$. נרצה למצוא פונקציה חשיבה $M' = f(\langle M \rangle, w)$ כך ש- M עוצרת על w אם"ם $L(M')$ היא שפה ח"ה. על קלט x :

1. מריצה את M על w למשך $|x|$ צעדים.
2. אם M עצרה אז M' דוחה.
3. אם M לא עצרה, הרץ את M_{abc} על x ו- M' תענה כמוהה.

נכונות:

- f חשיבה.
 - אם M עוצרת על w אז קיים k כך שלכל $|x| \geq k$, M' תדחה את x . מכאן, ש- $L(M')$ סופית ובפרט חסרת הקשר.
 - אם M לא עוצרת על w אזי $L(M') = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, שאינה ח"ה.
- שימו לב שהנחנו כי הא"ב מכיל את $\{a, b, c\}$. זו כמובן אינה הנחה מגבילה, שכן ניתן לקחת כל שפה שאינה ח"ה מעל הא"ב שנרצה.

הכיוון $\overline{H_{TM}} \leq_m L$ נרצה למצוא פונקציה חשיבה $M' = g(\langle M \rangle, w)$ כך ש- M לא עוצרת על w אם"ם $L(M')$ היא שפה ח"ה. על קלט x :

1. מריצה את M על w .
2. אם M עוצרת אז M' מריצה את M_{abc} על x ועונה כמוהה.

נכונות:

- g חשיבה.
- אם M לא עוצרת על w אזי $L(M') = \emptyset$, שהיא חסרת הקשר.
- אם M עוצרת על w אזי $L(M') = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, שאינה ח"ה.

תרגיל 4

ניכור כי עבור שפה L , $Reverse(L) = \{w^R \mid w \in L\}$. הוכיחו כי $RE \setminus R$ סגורה תחת $Reverse$.

פתרון

תהא $L \in RE \setminus R$. נראה:

1. $L^R \in RE$. ידוע כי $L \in RE$ ולכן קיימת מ"ט M המקבלת את L . נגדיר מ"ט M^R שעל קלט x מריצה את M על x^R ועונה כמוהה. ברור כי אם $x \in L^R$ אזי $x^R \in L$ ו- M (ולכן M^R) תקבל. אם $x \notin L^R$ אזי $x^R \notin L$ ו- M (ולכן M^R) תדחה או לא תעצור.

2. $L^R \notin R$. נראה כי $L \leq_m L^R$. הרדוקציה $f: w \mapsto w^R$. אזי, אם $w \in L$ אז $w^R \in L^R$. אם $w \in L^R$ אז $w^R \in L$.

תרגיל 5

הוכיחו:

$$L_{01} = \{w \mid w = 0x \text{ for some } x \in A_{TM} \text{ or } w = 1y \text{ for some } y \in \overline{A_{TM}}\} \notin RE \cup \text{coRE}$$

פתרון

נראה כי $A_{TM} \leq_m L$ (ואז $L \notin \text{coRE}$) ו- $\overline{A_{TM}} \leq_m L$ (ואז $L \notin RE$).

הביון $A_{TM} \leq_m L$ נרצה למצוא פונקציה חשיבה $f: \langle M \rangle, w \mapsto w'$ כך ש- M מקבלת את w אם ורק אם $w' \in L_{01}$. על הקלט $\langle M \rangle, w$ תחזיר את המחרוזת $\langle M \rangle, w$. נכונות:

• f חשיבה.

• אם M מקבלת את w אז $\langle M \rangle, w \in L_{01}$.

• אם M לא מקבלת את w אז $\langle M \rangle, w \notin L_{01}$.

הביון $\overline{A_{TM}} \leq_m L$ נרצה למצוא פונקציה חשיבה $g: \langle M \rangle, w \mapsto w'$ כך ש- M מקבלת את w אם ורק אם $w' \in L_{01}$. על הקלט $\langle M \rangle, w$ תחזיר את המחרוזת $\langle M \rangle, w$. נכונות:

• g חשיבה.

• אם M לא מקבלת את w אז $\langle M \rangle, w \in L_{01}$.

• אם M מקבלת את w אז $\langle M \rangle, w \notin L_{01}$.

תרגיל 6

תהא:

$$L_k = \{\langle M \rangle \mid M \text{ on } \epsilon \text{ does not use more than } k \text{ places on the tape}\}$$

ראינו תרגול שעבר ש- $L_{100} \in R$. תהא $L = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_k$. הוכיחו כי $L \notin R$ (נסו להוכיח בעצמכם כי $L \in RE$).

פתרון

נראה רדוקציה $H_{TM, \epsilon} \leq_m L$. נרצה למצוא פונקציה חשיבה $f(\langle M \rangle) = \langle M' \rangle$ כך ש- M עוצרת על ϵ אם"ם $\langle M' \rangle \in L$. על קלט x :

1. מריצה את M על ϵ ובכל שלב של הסימולציה, M' כותבת \$ בסוף תוכן הסרט.

2. אם M עצרה, M' תענה כמוהה.

נכונות:

1. f חשיבה.

2. אם M עוצרת על ϵ אז M' משתמשת במספר סופי של תאים ולכן $\langle M' \rangle \in L$.

3. אם M לא עוצרת על ϵ אז M' משתמשת במספר אינסופי של תאים ולכן $\langle M' \rangle \notin L$.

תרגיל 7

נגדיר תכונה של שפות ב- coRE להיות תת-קבוצה של שפות $C \subseteq \text{coRE}$. כרגיל, תכונה תקרא לא טריוויאלית אם $C \neq \emptyset$ וגם $C \neq \text{coRE}$. נזכיר כי $L_C = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in C\}$.

1. הוכיחו/הפריכו: עבור כל תכונה טריוויאלית C מתקיים כי $L_C \in R$.

2. הוכיחו "משפט רייס" עבור coRE : תהא C תכונה של שפות ב- coRE כך ש- $C \cap R \neq \emptyset$. אזי, $L_C \notin R$.

פתרון

1. הטענה לא נכונה. נניח $C = \text{coRE}$. אזי, $L_C = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \text{coRE}\}$. לפי הגדרה, לכל M מתקיים ש- $L(M) \in \text{RE}$ ולכן מתקיים ש- $L_C = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in R\}$. $L_C = R \subset \text{RE}$ אינה טריוויאלית לפי משפט רייס, ולכן $L_C \notin R$.

2. נוכיח את המשפט:

(א) תהא C תכונה כ"ל. אזי, $C \cap R \subseteq R$ ובנוסף $C \cap R \neq \emptyset$ ולכן נוכל לקחת את $C \cap R$ כתכונה לא טריוויאלית של שפות ב- RE .

(ב) ממשפט רייס המקורי, $L_{C \cap R} \notin R$. נראה כי $L_{C \cap R} = L_C$:

i. עבור $\langle M \rangle \in L_{C \cap R}$ מתקיים ש- $L(M) \in C \cap R$ ובפרט $L(M) \in C$ ולכן $\langle M \rangle \in L_C$.
ii. עבור $\langle M \rangle \in L_C$ מתקיים ש- $L(M) \in C$. נניח בשלילה ש- $L(M) \notin C \cap R$ אזי, $L(M) \in C \setminus R$ ואז בפרט $L(M) \in \text{RE} \setminus R$ ולכן $L(M) \notin \text{coRE}$ ו- $\langle M \rangle \notin L_C$. בשני המקרים קיבלנו סתירה.

(ג) משני כיווני ההכלה קיבלנו כי $L_{C \cap R} = L_C$ ולכן גם $L_C \notin R$, כנדרש.