מודלים חישוביים
תרגול מס' 13

18 ביוני 2015

נושאי התרגול:

- המחלקה NPC – המשך.

1 המחלקה NPC – המשך

נזכיר:

הגדרה 1.1 שפה $L \in \mathcal{NPC}$ (L היא $\mathcal{NP}$-שלמה) אם:

1. $L \in \mathcal{NP}$.
2. L היא $\mathcal{NP}$-קשה: לכל $A \in \mathcal{NP}$ מתקיים ש- $A \leq_p \mathcal{NP}$.

תרגיל 1

הוכיחו כי:

$$\text{IS} \vee \text{CLIQUE} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ has an IS or a clique of size } k\} \in \mathcal{NPC}$$

פתרון

נראה כי $\text{IS} \vee \text{CLIQUE} \in \mathcal{NP}$ ושהיא $\mathcal{NP}$-קשה.

- קל לראות כי $\text{IS} \vee \text{CLIQUE} \in \mathcal{NP}$ – בדקו בעצמכם.
- כעת, כדי להראות שהיא קשה, נראה $\text{IS} \leq_p \text{IS} \wedge \text{CLIQUE}$. הרדוקציה תהיה $f(\langle G, k\rangle) = \langle G', k'\rangle$ כך שעבור $G = (V, E)$, G' יהיה G בתוספת $|V|$ צמתים מבודדים, ו- $k' = k + |V|$. ואז:
  - ברור כי f פולינומית.
  - אם ל- G יש קבוצה ב"ת בגודל k אז ל- G' יש קבוצה ב"ת בגודל $k + |V|$ ולכן $\langle G', k'\rangle \in \text{IS} \vee \text{CLIQUE}$.
  - אם ל- G אין קבוצה ב"ת בגודל k אז גם ל- G' אין קבוצה ב"ת בגודל $k + |V|$ וגם אין קליק בגודל $k + |V|$ (כי הצמתים מבודדים). לכן, $\langle G', k'\rangle \notin \text{IS} \vee \text{CLIQUE}$.

תרגיל 2

נגדיר את השפה NAE3SAT כשפת קידודי הנוסחאות $\langle \varphi \rangle$ כך ש- $\varphi \in \text{3SAT}$ וקיימת השמה מספקת ל- φ כך שבכל פסוקית ליטרל אחד לפחות מקבל True וליטרל אחד לפחות מקבל False. לדוגמא, אם $\varphi = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_2)$ אז $\varphi \in \text{NAE3SAT}$ עבור ההשמה $x_1 = 1$ ו- $x_2 = 0$. הוכיחו כי $\text{NAE3SAT} \in \mathcal{NPC}$.

פתרון

הוכיחו לבד כי $\mathcal{NP} \ni$ NAE3SAT. כעת, נשים לב שאם v היא השמת Not All Equal לנוסחה φ אז $\bar{v}$ היא גם השמת Not All Equal ל־ φ (ברור כי $\bar{v}$ היא השמת Not All Equal כי בכל פסוקית ערכי האמת יתהפכו ביחס ל־ v ואז מכיוון שהיה לפחות ליטרל אחד שקיבל True ואחד שקיבל False, המצב יישמר).
תחילה נראה כי $3\text{SAT} \le_p \text{NAE4SAT}$ (כמו NAE3SAT רק עבור נוסחאות 4SAT). הרדוקציה: עבור קלט $\langle\varphi\rangle = \langle C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_\ell\rangle$, נחזיר:

$$\langle\varphi'\rangle = \langle(C_1 \vee z) \wedge (C_2 \vee z) \wedge \ldots \wedge (C_\ell \vee z)\rangle$$

נכונות:

- ברור כי הרדוקציה פולינומית.
- אם $\langle\varphi\rangle \in 3\text{SAT}$, תהא v השמה מספקת של φ. נגדיר את v' השמה ל־ φ' להיות זהה ל־ v ו־ $v'(z) = 0$. אזי, v' מספקת את φ' והיא Not All Equal ולכן $\langle\varphi'\rangle \in \text{NAE4SAT}$.
- אם $\langle\varphi'\rangle \in \text{NAE4SAT}$, תהא v השמת Not All Equal ל־ φ'. נוכל להניח בה"כ כי $v(z) = 0$ (אחרת, נסתכל על $\bar{v}$ והיא גם השמת Not All Equal). אזי, v מספקת גם את φ ולכן $\langle\varphi\rangle \in 3\text{SAT}$.

כעת, נראה $\text{NAE4SAT} \le_p \text{NAE3SAT}$. הרדוקציה: עבור קלט $\langle\varphi\rangle = \langle C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_\ell\rangle$:

- לכל $C_i = a \vee b \vee c \vee z$:
  - פצל את C_i לשתי פסוקיות, $C_i^1 = a \vee b \vee w_i$ ו־ $C_i^2 = \neg w_i \vee c \vee z$.
- נגדיר: $\varphi' = C_1^1 \wedge C_1^2 \wedge \ldots \wedge C_\ell^1 \wedge C_\ell^2$.
- החזר את $\langle\varphi'\rangle$.

נכונות:

- ברור כי הרדוקציה פולינומית.
- אם $\langle\varphi\rangle \in \text{NAE4SAT}$, תהא v השמת Not All Equal ל־ φ. נגדיר את v' השמה ל־ φ' להיות זהה ל־ v ו־

$$v'(w_i) = \begin{cases} 0 & (v(a) = v(b) = 1) \vee (v(c) = v(z) = 0) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

  ברור כי v' היא השמת Not All Equal ל־ φ' ולכן $\langle\varphi'\rangle \in \text{NAE3SAT}$.
- אם $\langle\varphi'\rangle \in \text{NAE3SAT}$ עם השמת Not All Equal v' אז לא יתכן ש־ a, b, c, z כולם True או שכולם False ולכן v' היא גם השמת Not All Equal ל־ φ ו־ $\langle\varphi\rangle \in \text{NAE4SAT}$.

הוכחנו ש־ $3\text{SAT} \le_p \text{NAE4SAT}$ ו־ $\text{NAE4SAT} \le_p \text{NAE3SAT}$. מהטרנזיטיביות של רדוקציות פולינומיות, $3\text{SAT} \le_p \text{NAE3SAT}$. 3SAT היא ב־ $\mathcal{NPC}$, NAE3SAT היא ב־ $\mathcal{NP}$ ובסך הכל $\text{NAE3SAT} \in \mathcal{NPC}$.

תרגיל 3

נזכיר כי $\text{SubsetSum} = \left\{\langle x_1, \ldots, x_k, t\rangle \mid \exists I \subseteq \{1, \ldots, k\} . \sum_{i \in I} x_i = t\right\}$. הוכיחו כי:

$$\text{Partition} = \left\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \exists S \subseteq \{1, \ldots, n\} . \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \notin S} x_i\right\} \in \mathcal{NPC}$$

פתרון

נראה כי $\text{Partition} \in \mathcal{NP}$ ושהיא $\mathcal{NP}$-קשה.

- קל לראות כי $\text{Partition} \in \mathcal{NP}$ – בדקו בעצמכם.
- כעת, כדי להראות שהיא קשה, נראה $\text{SubsetSum} \leq_p \text{Partition}$. הרדוקציה תהיה $f\left(\langle x_1, \ldots, x_n, t\rangle\right) = \langle x_1, \ldots, x_n, a, b\rangle$ כך שאם נסמן $k = \sum_{i=1}^{n} x_i$, אז $a = t + k$ ו־ $b = 2k - t$. ואז:
  - ברור כי f פולינומית.
  - אם $\langle x_1, \ldots, x_n, t\rangle \in \text{SubsetSum}$ אז קיימת $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ כך ש־ $\sum_{i \in I} x_i = t$. נגדיר

$$S = \{x_i \mid i \in I\} \cup \{b\}$$

ואז:

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in S} y &= \sum_{i \in I} x_i + b = t + 2k - t = 2k \\
\sum_{y \notin S} y &= \sum_{i \notin I} x_i + a = k - t + t + k = 2k
\end{aligned}$$

ולכן $\langle x_1, \ldots, x_n, a, b\rangle \in \text{Partition}$.

  - אם $\langle x_1, \ldots, x_n, a, b\rangle \in \text{Partition}$, קיימת חלוקה מאוזנת I של

$$\left\langle x_1, \ldots, x_n, t + \sum_{i=1}^{n} x_i, 2\sum_{i=1}^{n} x_i - t\right\rangle$$

ברור כי $t + \sum_{i=1}^{n} x_i$ ו־ $2\sum_{i=1}^{n} x_i - t$ לא יכולים להיות באותו צד של החלוקה. נסמן $I' = I \setminus \{a, b\}$. אם כך:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I'} x_i + 2\sum_{i=1}^{n} x_i - t &= \sum_{i \notin I'} x_i + t + \sum_{i=1}^{n} x_i \\
\sum_{i \in I'} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i - t &= \sum_{i \notin I'} x_i + t \\
\sum_{i \in I'} x_i + \sum_{i \in I'} x_i + \sum_{i \notin I'} x_i - t &= \sum_{i \notin I'} x_i + t \\
2\sum_{i \in I'} x_i &= 2t \\
\sum_{i \in I'} x_i &= t
\end{aligned}$$

ולכן $\langle x_1, \ldots, x_n, t\rangle \in \text{SubsetSum}$.

תרגיל 4

הוכיחו כי:

$$\text{XS} = \left\{x_1, \ldots, x_n \mid \exists S \subseteq \{1, \ldots, n\} \,.\, \sum_{i \in S} x_i + \left|\bar{S}\right| = \sum_{i \notin S} x_i + |S|\right\} \in \mathcal{NPC}$$

פתרון

נראה כי $XS \in \mathcal{NP}$ ושהיא $\mathcal{NP}$-קשה.

- קל לראות כי $\mathrm{XS} \in \mathcal{NP}$ – בדקו בעצמכם.
- כעת, כדי להראות שהיא קשה, נראה $\mathrm{Partition} \leq_p \mathrm{XS}$. הרדוקציה תהיה $f(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) = \langle x_1+1, \ldots, x_n+1 \rangle$. ואז:
  - ברור כי f פולינומית.
  - מתקיים:

$$\begin{aligned}
\langle x_1+1, \ldots, x_n+1 \rangle \in \mathrm{XS} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists S. \sum_{i \in S} (x_i+1) + \left|\bar{S}\right| = \sum_{i \notin S} (x_i+1) + |S| \\
&\Leftrightarrow \quad \exists S. \sum_{i \in S} (x_i+1) - |S| = \sum_{i \notin S} (x_i+1) - \left|\bar{S}\right| \\
&\Leftrightarrow \quad \exists S. \sum_{i \in S} (x_i+1-1) = \sum_{i \notin S} (x_i+1-1) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists S. \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \notin S} x_i \\
&\Leftrightarrow \quad \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \mathrm{Partition}
\end{aligned}$$

ולכן הנכונות מתקיימת.