מודלים חישוביים
תרגול מס' 7

18 במאי 2015

נושאי התרגול:

- מכונת טיורינג.

1 מכונת טיורינג

נעבור לדבר על מודל חישוב חזק יותר (ובמובן מסוים, הוא מודל החישוב הסטנדרטי) – מכונות טיורינג. בניגוד למודלים שראינו עד כה, שקריאת הקלט התבצעה פעם אחת בלבד, והיה ניתן לשמור מידע נוסף רק בצורה מוגבלת (אוטומט מחסנית), במודל של מכונת טיורינג (מ"ט) אין לנו את המגבלות האלו. במ"ט, הקלט כתוב ע"ג סרט העבודה, שהוא דו־כיווני. בכל שלב, המכונה כותבת תו מסוים על הסרט ויכולה לזוז אחורה או קדימה בהתאם למצבי הבקרה שלה. פורמלית:

הגדרה 1.1 מ"ט היא שביעיה $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$, כאשר:

- Q – קבוצה סופית של מצבים.
- Σ – א"ב הקלט (לא מכיל את הסימן $\sqcup$).
- Γ – א"ב הסרט ($\Sigma \subset \Gamma$ ו־ $\sqcup \in \Gamma$).
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ היא פונקצית המעברים.
- $q_0 \in Q$ הוא המצב ההתחלתי.
- $q_a \in Q$ הוא המצב המקבל.
- $q_r \in Q$ הוא המצב הדוחה.

המשמעות של $\delta(q, a) = (r, b, L)$: במצב q אם הראש הוא על a, המכונה כותבת b במקום a, עוברת למצב r והראש זז שמאלה (אם R – ימינה). בתחילת החישוב, הקלט נכתב ע"ג סרט העבודה ובשאר הסרט יש $\sqcup$. הראש נמצא על תחילת הסרט. החישוב מסתיים כאשר המכונה מגיעה ל־ q_a או ל־ q_r, ואז נגיד שהמכונה "קיבלה" את הקלט או "דחתה" אותו. שימו לב שמ"ט יכולה, אם כך, גם לא לעצור לעולם.

הגדרה 1.2 קונפיגורציה של מ"ט M היא מצב רגעי (snapshot) של החישוב: uq_iv כך ש־ $u, v \in \Gamma^\star$, $q_i \in Q$, המצב הנוכחי הוא q_i, המחרוזת u כתובה משמאל לראש ו־ v כתובה מימינו (כך שהתו הראשון ב־ v הוא התו שאותו קורא כרגע הראש). לדוגמא, אם $\delta(q_i, b) = (q_j, c, L)$ אז הקונפיגורציה uaq_ibv עוברת לקונפיגורציה uq_jacv.

הגדרה 1.3 מ"ט M מקבלת קלט w אם קיימת סדרת קונפיגורציות חוקית אשר מתחילה מקונפיגורציה תחילית q_0w ומגיעה לקונפיגורציה מקבלת $w_0q_aw_1$ (עבור $w_0, w_1 \in \Gamma^\star$ כלשהם) בלי לעבור בקונפיגורציה דוחה לפני כן. אוסף כל המילים ש־ M מקבלת היא השפה של M, $L(M)$.

הגדרה 1.4 שפה L ניתנת למניה רקורסיבית (RE – Recursively Enumerable) אם קיימת מ"ט המקבלת אותה. במצב זה, נגיד ש־ M מקבלת את L. אם בנוסף, M עוצרת על כל קלט (פורמלית – מגיעה לקונפיגורציה דוחה או מקבלת) נגיד ש־ M מכריעה את L. נגיד ששפה היא רקורסיבית (R – Recursive) אם קיימת מ"ט המכריעה אותה.

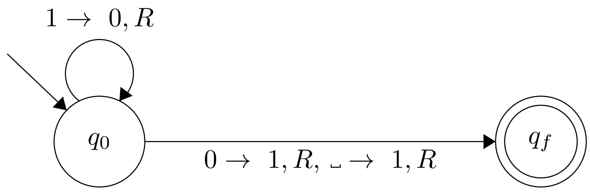
ראינו בהרצאה גם מודלים שקולים למודל שהצגנו כאן: מ"ט שיכולה להשאר במקום, מ"ט רב־סרטית ומ"ט אי־דטרמיניסטית.

דוגמא 1

עבור הפונקציה $f(x)=x+1$, בנה מ"ט המקבלת קלט x ביצוג בינארי (כך שה־ LSB בתחילת הסרט) ומסיימת כאשר $f(x)$ רשום על הסרט ולאחריו $\sqcup$ (במקרה זה, נגיד ש־ M מחשבת את f).

$$M=\left(\{q_0,q_f\},\{0,1\},\{0,1,\sqcup\},\delta,q_0,q_f\right)$$

כך ש־ $\delta(q_0,0)=(q_f,1,R)$, $\delta(q_0,1)=(q_0,0,R)$ ו־ $\delta(q_0,\sqcup)=(q_f,1,R)$. בתרשים:



שימו לב שכאן לא היה לנו "מצב דוחה" מכיוון שזוהי מ"ט שמחשבת פונקציה, ולא שמקבלת שפה. אם הקלט היה נתון לנו כך ש־ MSB בתחילת הסרט, וכך גם היינו צריכים להחזיר את התשובה? היינו מזיזים את הקלט ימינה, כותבים $ בתו הראשון ופועלים כמו קודם.

תרגיל 1

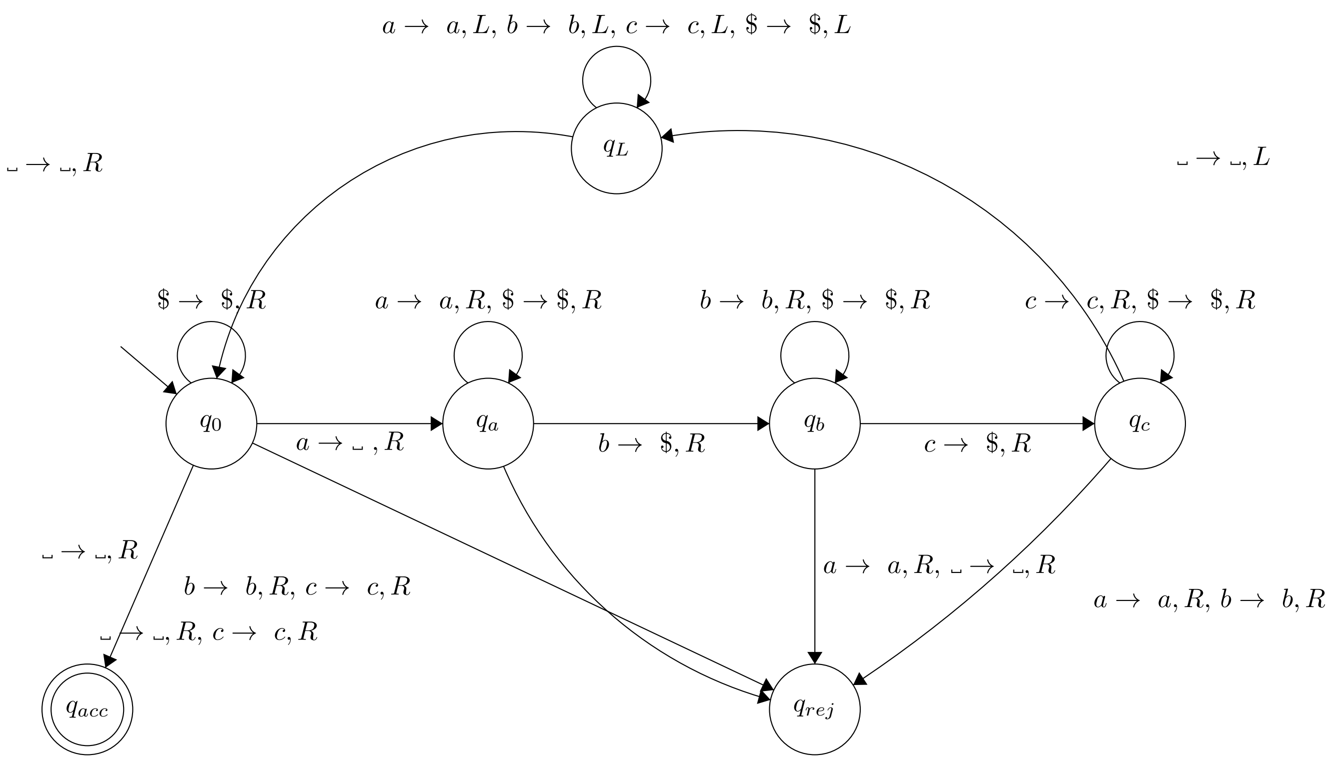
בנו מ"ט המקבלת את השפה $L_1=\{a^nb^nc^n\mid n\geq 0\}$.

פתרון

נשתמש בתו מיוחד, $, כדי לציין תו מחוק. הרעיון הוא לעבור פעם אחר פעם על הקלט ובכל פעם למחוק a,b ו־ c בודדים. נקבל אס"ם נוכל לעשות זאת ולסיים עם מחרוזת שכולה $. אם כך, האלגוריתם שנרצה ליישם:

1. כל עוד התו הנוכחי הוא $, המשך לזוז ימינה.
2. אם התו הנוכחי הוא $\sqcup$, קבל. אם התו הנוכחי הוא b או c, דחה.
3. החלף את ה־ a עם $\sqcup$ וזוז ימינה.
4. כל עוד התו הנוכחי הוא a או $, זוז ימינה. אם ראית c או $\sqcup$, דחה. אם ראית b, החלף עם $ וזוז ימינה.
5. כל עוד התו הנוכחי הוא b או $, זוז ימינה. אם ראית a או $\sqcup$, דחה. אם ראית c, החלף עם $ וזוז ימינה.
6. כל עוד התו הנוכחי הוא c או $, זוז ימינה. אם ראית a או b, דחה. אם ראית $\sqcup$, חזור שמאלה עד ל־ $\sqcup$ הראשון שתראה, זוז ימינה וחזור לסעיף 1.

בתרשים:



תיאור המצבים:

- q_0 – הראש הוא בתחילת הקלט.
- q_a – קראנו לפחות a אחד ולא b־ים או c־ים.
- q_b – קראנו לפחות a אחד ו־ b אחד, אך לא c־ים.
- q_c – קראנו לפחות a אחד, b אחד ו־ c אחד.
- q_L – חוזרים שמאלה.

תכונות שתמיד נשמרות עבור קלט בשפה:

- הקלט המקורי הוא מהצורה $a^\star b^\star c^\star$.
- תוכן הסרט הוא מהצורה $a^\star \$^i b^\star \$^i c^\star$.
- מספר ה־ a־ים שנמחקו (ע"י $\sqcup$) שווה למספר ה־ b־ים שנמחקו (ע"י $\$$), ששווה למספר ה־ c־ים שנמחקו (ע"י $\$$).

אם כך, כדי להוכיח את נכונות הבנייה נצטרך להוכיח בין השאר את הטענה הבאה (שהוכחתה תשאר כתרגיל):

טענה 1.5 ניתן להגיע למצב מקבל אם כל ה־ a־ים הוחלפו ב־ $\sqcup$ וכל ה־ b־ים וה־ c־ים הוחלפו ב־ $\$$.

כדי להוכיח שהמכונה מקבלת את L_1 נצטרך להוכיח את הטענה ההפוכה – שלא ניתן לקבל מילים שאינן בשפה. כדי להוכיח שהיא גם מכריעה את L_1 נצטרך להוכיח שכל מילה שאינה בשפה מובילה למצב דוחה.

תרגיל 2

בנו מ"ט המכריעה את השפה $L_2 = \left\{ w \in \{a,b,c\}^\star \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w) \right\}$.

פתרון

נשתמש במודל רב־סרטי (ונאפשר לראשים גם להשאר במקום):

1. סרט קלט.
2. סרט עבודה מס' 1 – לספירת ה־ a־ים.
3. סרט עבודה מס' 2 – לספירת ה־ b־ים.
4. סרט עבודה מס' 3 – לספירת ה־ c־ים.

נקרא פעם אחת את הקלט, נעדכן את הסרטים, ובסוף נבדוק שכל סרטי העבודה באותו גודל. נתאר את המכונה, אך לא נוכיח פורמלית נכונות.

חלק ראשון – אתחול

כתוב $\$$ על שלושת סרטי העבודה וזוז ימינה בשלושת הסרטים. עבור לחלק השני.

חלק שני – קריאה

בצע:

1. אם הראשים הם במצב $(\sqcup,\sqcup,\sqcup,\sqcup)$, עבור לחלק השלישי.
2. אם הראשים הם במצב $(a,\sqcup,\sqcup,\sqcup)$, כתוב $(a,a,\sqcup,\sqcup)$ ועבור ימינה בסרט הקלט וסרט עבודה מס' 1.
3. אם הראשים הם במצב $(b,\sqcup,\sqcup,\sqcup)$, כתוב $(b,\sqcup,b,\sqcup)$ ועבור ימינה בסרט הקלט וסרט עבודה מס' 2.
4. אם הראשים הם במצב $(c,\sqcup,\sqcup,\sqcup)$, כתוב $(c,\sqcup,\sqcup,c)$ ועבור ימינה בסרט הקלט וסרט עבודה מס' 3.

חלק שלישי – בדיקה

בצע:

1. אם הראשים הם במצב $(\sqcup,\sqcup,\sqcup,\sqcup)$, כתוב $(\sqcup,\sqcup,\sqcup,\sqcup)$ ועבור שמאלה בכל סרטי העבודה.
2. אם הראשים הם במצב $(\sqcup,a,b,c)$, כתוב $(\sqcup,\sqcup,\sqcup,\sqcup)$ ועבור שמאלה בכל סרטי העבודה.
3. אם הראשים הם במצב $(\sqcup,\$,\$,\$)$, קבל.
4. אם הראשים הם במצב המכיל $\$$ אחד או שניים – דחה.

תרגיל 3

הראו כי מודל חד־סרטי שבו הסרט הוא אינסופי לשני הכיוונים (מודל דו־צדדי) שקול למודל החד־סרטי הרגיל.

פתרון

כיוון ראשון

תהא M מ"ט במודל הרגיל. נבנה מ"ט דו־צדדית שקולה M'. M' על קלט w:

1. הזז את הראש לתא הראשון שמשמאל ל־ w.
2. כתוב שם תו חדש $\S \notin \Gamma$.
3. החזר את הראש לתחילת הקלט ועבור למצב q_0 של M.
4. רוץ כמו M, עם הסייג הבא: בקריאת התו $\S$, זוז ימינה והשאר באותו מצב. כלומר, לכל מצב q של M, $\delta(q,\S)=(q,\S,R)$.

הרעיון: במודל רגיל, לא ניתן לזוז שמאלה מהתא הראשון ופקודות המזיזות שמאלה מהתא הראשון יגרמו לראש להשאר במקום. כדי לסמלץ את זה במודל דו־צדדי, "נסמן" את התא הראשון ונכפה שלא ניתן יהיה לזוז שמאלה ממנו.

כיוון שני – פתרון ראשון

תהא $M' = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט דו־צדדית. נבנה מ"ט שקולה $M = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', s, q'_a, q'_r)$ במודל הרגיל. כל תא יכיל זוג תווים – את הערך שכתוב בתא ה־ i (כלומר, i צעדים מימין לאמצע) וזה שכתוב בתא ה־ $-i$ (כלומר, i צעדים משמאל לאמצע). עבור התא ה־ 0 נסמן $\$$ במקום השני. לדוגמא, כאשר ב־ M' יש a בתא השני מימין להתחלה ו־ b בתא השני משמאל להתחלה, ב־ M יהיה כתוב (a, b) בתא השני. אם כך,

$$\Gamma' = \Gamma \times (\Gamma \cup \{\$\})$$

המצב ב־ M ישמור את המידע של האם הראש ב־ M' הוא בחצי הימני או השמאלי של הסרט הדו־צדדי. אם כך,

$$Q' = (Q \times \{+, -\}) \cup \{s\}$$

נתאר כעת את פונקציות המעברים. עבור $\delta(q, a) = (r, x, D)$ (כאשר $D \in \{L, R\}$), נוסיף:

$$\begin{aligned}
\delta'((q, +), (a, b)) &= ((r, +), (x, b), D) \\
\delta'((q, -), (b, a)) &= ((r, -), (b, x), \neg D) \\
\delta'((q, +/-), (a, \$)) &= ((r, h(D)), (x, \$), R)
\end{aligned}$$

כך ש־ $\neg D$ הופך R ל־ L ולהיפך, $h(L) = -$ ו־ $h(R) = +$. לפני המעבר הראשון נסמן את התא האמצעי (כלומר, את התא שהחל ממנו כתוב הקלט):

$$\delta(q_0, a) = (r, x, D) \Rightarrow \delta'(s, (a, \llcorner\!\lrcorner)) = ((r, h(D)), (x, \$), R)$$

כיוון שני – פתרון שני

נראה כעת פתרון נוסף (השלימו לבד את כתיבת המעברים באופן פורמלי). תהא M' מ"ט דו־צדדית. נבנה מ"ט שקולה M במודל הרגיל. M על קלט w:

1. הזז את הקלט תא אחד ימינה.
2. סמן את התא השמאלי ביותר בתו חדש $L \notin \Gamma$ והתא הימני ביותר בתו חדש $R \notin \Gamma$.
3. החזר את הראש לתחילת הקלט ועבור למצב q_0 של M'.
4. רוץ כמו M', עם הסייג הבא: בקריאת התו L,
   (א) זכור את המצב הנוכחי q.
   (ב) העבר את תוכן הסרט (פרט לתו L) תא אחד ימינה והשאר $\llcorner\!\lrcorner$ אחד לפני L.
   (ג) חזור ל־ q.

הרעיון: כשמכונה דו־צדדית תרצה לגלוש שמאלה, "נפנה" לה מקום ע"י הזזת כל הסרט תא אחד ימינה וכך נבטיח שהוא תוכל לבצע את הצעד המקורי, וחוזר חלילה. אם כך, למה היינו צריכים את R?

תרגיל 4

הראו כי השפות המתקבלות ע"י מ"ט סגורות תחת סגור־קליני.

פתרון

תהא M מ"ט המקבלת את L. נבנה מ"ט $M^\star$ א"ד המקבלת את $L^\star$. ל־ $M^\star$ יהיו שני סרטים: סרט הקלט וסרט עבור סמלוץ M. $M^\star$ על קלט $w = w_1 \cdots w_n$:

1. אם $w = \epsilon$, קבל.
2. כל עוד ראש הקלט הוא על $w_i \neq \llcorner\!\lrcorner$:

(א) העתק את w_i לסרט הסמלוץ וזוז ימינה.

(ב) כל עוד ראש הקלט הוא על $\sqcup \neq w_j$:

i. באופן א"ד בחר האם להעתיק את w_j לסרט הסמלוץ או לעצור את ההעתקה.

(ג) הרץ את M על הקלט שבסרט הסמלוץ.

(ד) אם M דחתה, דחה.

(ה) רוקן את סרט הסמלוץ.

3. קבל.

הרעיון הוא "לנחש" חלוקה של w לתתי מחרוזות ולהריץ את M על כל תת מחרוזת בנפרד. צריך להוכיח:

טענה 1.6 אם $w \in L^\star$ אזי $w \in L\left(M^\star\right)$, כלומר שקיים מסלול חישוב של $M^\star$ שמקבל, ואם $w \notin L^\star$ אזי $w \notin L\left(M^\star\right)$, כלומר $M^\star$ דוחה או אינה עוצרת.

האם השפות המוכרעות ע"י מ"ט סגורות תחת סגור־קליני?