מודלים חישוביים
תרגול מס' 8

18 במאי 2015

נושאי התרגול:

- המחלקות R ו־ RE.
- מונים (Enumerators).
- טיעוני ספירה.

1 המחלקות R ו־ RE

הגדרה 1.1 מ"ט M מקבלת (accepts) שפה L אם על קלט w: אם $w \in L$ היא מגיעה למצב מקבל ואם $w \notin L$ היא מגיעה למצב דוחה או לא עוצרת.

הגדרה 1.2 מ"ט M מכריעה (decides) שפה L אם על קלט w: אם $w \in L$ היא מגיעה למצב מקבל ואם $w \notin L$ היא מגיעה למצב דוחה. בפרט, תמיד עוצרת.

הגדרה 1.3 נגיד ש־ $L \in \mathrm{RE}$ אם קיימת מ"ט M המקבלת את L. נגיד ש־ $L \in \mathrm{R}$ אם קיימת מ"ט M המכריעה את L.

הגדרה 1.4 המחלקה coRE היא מחלקת השפות שמשלימן הוא ב־ RE. כלומר, $L \in \mathrm{coRE}$ אם קיימת מ"ט M המקבלת את $\bar{L}$. הוכחנו בכיתה כי $\mathrm{R} = \mathrm{RE} \cap \mathrm{coRE}$.

נזכיר כמה שפות מפורסמות:

- בעית העצירה – $H_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a TM and } M \text{ halts on } w\} \in \mathrm{RE} \backslash \mathrm{R}$.
- בעית הקבלה – $A_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a TM and } M \text{ accepts } w\} \in \mathrm{RE} \backslash \mathrm{R}$.
- $L_3 = \{\langle M_1\rangle, w_1, \langle M_2\rangle, w_2 \mid w_1 \in L(M_1) \wedge w_2 \notin L(M_2)\} \notin \mathrm{RE} \cup \mathrm{coRE}$.

כמו כן, נזכיר כי המחלקה R סגורה תחת משלים, איחוד וחיתוך.

תרגיל 1

הוכיחו כי R סגורה תחת הפעולה $\oplus$. כלומר, שאם $L_1 \in \mathrm{R}$ וגם $L_2 \in \mathrm{R}$ אזי

$$L_1 \oplus L_2 = \{w \mid w \in L_1 \backslash L_2 \vee w \in L_2 \backslash L_1\} \in \mathrm{R}$$

פתרון

ניתן כמובן להראות זאת ישירות בעזרת תכונות סגור (עשו זאת). נוכיח ישירות. תהינה M_1, M_2 מ"ט המכריעות את L_1, L_2 בהתאמה. נבנה $M_\oplus$ שעל קלט w:

1. מסמלצת את M_1 על w.
2. מסמלצת את M_2 על w.
3. אם M_1 קיבלה ו־ M_2 דחתה, קבל.
4. אם M_1 דחתה ו־ M_2 קיבלה, קבל.
5. דחה.

ברור כי $M_\oplus$ תמיד עוצרת, ו־ $w \in L_1 \oplus L_2$ אס"ם $M_\oplus$ מקבלת. מכאן, ש־ $L_1 \oplus L_2 \in \mathrm{R}$.

תרגיל 2

הוכיחו כי RE סגורה תחת איחוד.

פתרון

תהינה M_1, M_2 מ"ט המקבלות את L_1, L_2 בהתאמה. נבנה M שעל קלט w:

1. מסמלצת את M_1 ו־ M_2 על w במקביל (דהיינו, בכל שלב מסמלצים צעד אחד בכל אחת מהמכונות).
2. אם אחת מהן קיבלה, קבל.
3. אם שתיהן דחו, דחה.

נכונות: אם $w \in L_1 \cup L_2$ אזי אחד מהסמלוצים יעצור ויקבל ומכאן ש־ M תקבל. אם $w \notin L_1 \cup L_2$ אזי אף אחד מהסמלוצים לא יעצור ויקבל ולכן M תדחה או לא תעצור לעולם.

תרגיל 3

נגדיר את השפה

$$EVEN_{DFA} = \{\langle D \rangle \mid D \text{ is a DFA over } \Sigma = \{0,1\} \text{ and } L(D) \text{ contains a word of even length}\}$$

הוכיחו כי $EVEN_{DFA} \in \mathrm{R}$.

פתרון

נזכיר כי השפה

$$EMPTY_{DFA} = \{\langle D \rangle \mid D \text{ is a DFA and } L(D) = \emptyset\}$$

היא ב־ R. תהא M המכונה שמכריעה אותה. M' על קלט $\langle D \rangle$:

1. אם $\langle D \rangle$ אינו קידוד חוקי של אס"ד מעל $\Sigma = \{0,1\}$, דחה.
2. בנה אס"ד D_{even} עבור $L\left((\Sigma\Sigma)^\star\right)$.
3. בנה אס"ד D' עבור $L(D) \cap L\left((\Sigma\Sigma)^\star\right)$ (כיצד?).
4. סמלץ את M על $\langle D' \rangle$.
5. אם M קיבלה, דחה. אם M דחתה, קבל.

הנכונות ברורה: $L(D)$ מעל $\Sigma = \{0,1\}$ מכילה מילה באורך זוגי אס"ם $L(D) \cap L\left((\Sigma\Sigma)^\star\right)$ אינה ריקה, אס"ם M תדחה, אס"ם M' תקבל.

תרגיל 4

נגדיר את השפה $E_{TM} = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \emptyset\}$. הוכיחו כי $E_{TM} \in \text{coRE}$.

פתרון

נוכיח כי $\overline{E_{TM}} \in \text{RE}$. נבנה מ"ט M' שמקבלת את $\overline{E_{TM}}$ כך שעל קלט $\langle M\rangle$:

1. בודקת כי $\langle M\rangle$ הוא קידוד חוקי של מ"ט. אם לא, מקבלת. יהא Σ הא"ב שמעליו M עובדת. יהא $x_1, x_2, \ldots$ הסדר הלקסיקוגרפי של כל המילים מעל $\Sigma^\star$.
2. לכל i החל מ־ 1:
   (א) לכל j מ־ 1 עד i:
      i. סמלץ את M על x_j למשך i צעדים.
      ii. אם M מקבלת, קבל.

הנכונות:

- אם $\langle M\rangle \in \overline{E_{TM}}$ אזי קיימים i, j כך ש־ M מקבלת את x_j לאחר i צעדים. מכאן, ש־ M' תקבל.
- אם $\langle M\rangle \notin \overline{E_{TM}}$ אזי $\langle M\rangle \in E_{TM}$ ולכן לכל j M לא תקבל את x_j (לא למשנה לאחר כמה צעדים), ו־ M' לעולם לא תקבל.

הראינו כי $\overline{E_{TM}} \in \text{RE}$ ולכן $E_{TM} \in \text{coRE}$.

תרגיל 5

נגדיר את השפה $L_\infty = \{\langle M\rangle \mid |L(M)| = \infty\}$. הוכיחו כי $L_\infty \notin \text{R}$.

פתרון

נניח בשלילה ש־ $L_\infty \in \text{R}$ ותהא H מ"ט שמכריעה אותה. נבנה מ"ט M' שמכריעה את A_{TM}. M' על קלט $\langle M\rangle$ ו־ w:

1. נבנה מ"ט M_w הזהה ל־ M פרט לכך ש־ M_w מוחקת את הקלט בסרט שלה וכותבת עליו w במקום (כלומר, M_w מתעלמת מהקלט שלה).
2. הרץ את H על M_w.
3. M' עונה כמו H.

הנכונות:

- אם M מקבלת את w אז M_w תמיד מקבלת ולכן $L(M_w) = \Sigma^\star$, H תקבל ולכן גם M' תקבל.
- אם M לא מקבלת את w אז M_w לעולם לא תקבל ולכן $L(M_w) = \emptyset$, H תדחה ולכן גם M' תדחה.

מצאנו מ"ט המכריעה את A_{TM}, בסתירה לכך ש־ $A_{TM} \notin \text{R}$.

2 מונים (Enumerators)

הגדרה 2.1 מונה (enumerator) עבור שפה L הוא פונקציה $f_L : \mathbb{N} \to L$ שהיא חשיבה ועל.

משפט 2.2 $L \in \text{RE}$ אם"ם יש לה מונה.

תרגיל 6

מונה מונוטוני עבור שפה L הוא מונה כך שאם $i < j$ אזי $f_L(i) < f_L(j)$. כלומר, הוא מונה את המילים בשפה בסדר לקסיקוגרפי. הוכיחו: לכל שפה אינסופית L, $L \in \text{R}$ אם"ם יש ל־ L מונה מונוטוני.

פתרון

נוכיח את שני הכיוונים.

כיוון ראשון

נניח כי $L\in \mathrm{R}$. אזי, קיימת מ"ט M המכריעה את L. נבנה מונה מונוטוני f_L: על קלט i, נריץ את M על המילים בסדר לקסיקוגרפי ונפלוט את המילה ה־ i־ית שהתקבלה. שימו לב שמכיוון ש־ M מכריעה את L, היא בפרט עוצרת על כל קלט. f_L חשיבה, מחזירה את כל המילים ב־ L ומונוטונית.

כיוון שני

נניח כי L שפה אינסופית ו־ f_L הוא מונה מונוטוני עבורה. נבנה מ"ט M המכריעה את L. על קלט x:

1. M תחשב את $f_L\left(1\right),f_L\left(2\right),\dots$
2. אם היא הגיעה ל־ i כך ש־ $f_L\left(i\right)=x$, M תקבל.
3. אם היא הגיעה ל־ i כך ש־ $f_L\left(i\right)>x$, M תדחה.

נכונות:

- אם $x\in L$ אזי קיים i כך ש־ $f_L\left(i\right)=x$ ולכל $j<i$, $f_L\left(j\right)<x$. לכן, M תקבל.
- אם $x\notin L$ אזי לכל i, $f_L\left(i\right)\neq x$ אזי M לא תקבל. מכיוון ש־ L אינסופית, קיים $y>x$ ו־ j כך ש־ $f_L\left(j\right)=y$. לכן, שנגיע ל־ y אז M תדחה.

תרגיל 7

הוכיחו כי לכל שפה אינסופית $L\in \mathrm{RE}$ קיימת שפה אינסופית $L'\subseteq L$ כך ש־ $L'\in \mathrm{R}$.

פתרון

$L\in \mathrm{RE}$ אזי קיים מונה f_L עבור L. נסתכל על הסדרה $f_L\left(1\right),f_L\left(2\right),\dots$. נגדירה תת סדרה מונוטונית:

$$f_L\left(i_1\right),f_L\left(i_2\right),\dots$$

כך ש־ $i_1=1$ ו־ i_{j+1} הוא המספר הקטן ביותר שגדול מ־ i_j כך ש־ $f_L\left(i_j\right)<f_L\left(i_{j+1}\right)$. כעת נגדיר $g\left(j\right)=f_L\left(i_j\right)$ ו־

$$L'=\left\{g\left(j\right)\mid j\in\mathbb{N}\right\}$$

לפי הבנייה שלנו, $L'\subseteq L$, L' היא אינסופית ו־ g הוא מונה מונוטוני. g חשיבה שכן אנו צריכים לחשב מספר סופי של מילים כדי להגיע ל־ $g\left(j\right)$. מהתרגיל הקודם, $L'\in \mathrm{R}$.

3 טיעוני ספירה

תרגיל 8

הוכיחו כי לכל שפה אינסופית L קיימת $L'\subseteq L$ שאינה ב־ RE.

פתרון

ראינו בכיתה כי קבוצת מכונות הטיורינג היא בת מניה. תהא $\mathcal{L}'$ קבוצת השפות החלקיות ל־ L. כל תת־שפה כזו $A\in\mathcal{L}'$ נתנת לתיאור ע"י מחרוזת בינארית אינסופית $b_1,b_2,\dots$ כך ש־ $b_i=1$ אם"ם המילה ה־ i־ית ב־ L נמצאת ב־ A.
אם כך, מצאנו התאמה חח"ע ועל בין $\mathcal{L}'$ לסדרות בינאריות אינסופיות. קבוצת הסדרות הבינאריות האינסופיות (דהיינו, הקבוצה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$) היא אינה בת־מניה, ולכן $\mathcal{L}'$ אינה בת מניה ולכן קיימת $L'\in\mathcal{L}'$ שאינה ניתנת לקבלה על ידי מכונת טיורינג.

תרגיל 9

הוכיחו כי קיימת שפה אינסופית L כך שכל שפה אינסופית $L' \subseteq L$ אינה כריעה.

פתרון

תהא D קבוצת השפות האינסופיות הכריעות. מכאן, ש־ D בת מניה ותהיה $L_1, L_2, \ldots$ מניה שלה. נגדיר סדרה של מספרים טבעיים $n_0, n_1, \ldots$ כך:

1. $n_0 = 0$.
2. עבור $k \geq 1$, תהא w_k המחרוזת הקצרה ביותר ב־ L_k כך ש־ $|w_k| > n_{k-1}$ (L_k אינסופית אז בהכרח קיימת כזו).
3. נגדיר $n_k = |w_k| + 1$. אזי, $n_{k-1} < |w_k| < n_k$.

כעת, נגדיר $L = \{1^{n_0}, 1^{n_1}, 1^{n_2}, \ldots\}$ כשפה שלנו. כעת נראה כי לכל שפה אינסופית כריעה A, $A \not\subseteq L$ וזה יוכיח את הטענה שלנו.

נניח בשלילה שקיים i עבורו $L_i \subseteq L$. אזי:

- $w_i \in L_i$.
- $n_{i-1} < |w_i| < n_i$ ולכן $w_i \notin L$.

וזה בסתירה, כי מצאנו מילה שנמצאת ב־ L_i אך לא ב־ L.