

מודלים חישוביים

תרגול מס' 9

18 במאי 2015

נושאי התרגול:

• רדוקציות.

1 רדוקציות

בהנתן שתי שפות A ו- B , אם A ניתנת לרדוקציה ל- B אז ניתן להשתמש בפתרון של B כדי למצוא פתרון של A . שימו לב שזה לא אומר דבר על האם ניתן וכיצד ניתן לפתור את A או את B לבדן. פורמלית:

הגדרה 1.1 פונקציה חשיבה $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ היא רדוקציה מ- A ל- B אם $w \in A$ אם ורק אם $f(w) \in B$. אם קיימת רדוקציה כזו ("רדוקצית מיפוי") נסמן $A \leq_m B$. שימו לב ש- $A \leq_m B$ אם ורק אם $\bar{A} \leq_m \bar{B}$.

משפט 1.2 אם $A \leq_m B$ ו- $B \in R$ אז $A \in R$. אם $A \leq_m B$ ו- $A \in RE$ אז $B \in RE$.

משפט 1.3 אם $A \leq_m B$ ו- $A \notin R$ אז $B \notin R$. אם $A \leq_m B$ ו- $A \notin RE$ אז $B \notin RE$.

נזכיר כי ראינו כבר:

$$A_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ is a TM that accepts } w\} \in RE \setminus R$$

$$H_{TM} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ is a TM that halts on } w\} \in RE \setminus R$$

ואם נגדיר:

$$H_{TM, \epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is a TM that halts on } \epsilon\}$$

אז מתקיים כי $H_{TM} \leq_m H_{TM, \epsilon}$ (מדוע?) ולכן למשל $H_{TM, \epsilon} \notin R$.

תרגיל 1

הוכיחו/הפריכו:

$$L_1 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ visits one state at least twice when running on } \epsilon\} \in R$$

פתרון

הטענה נכונה. שימו לב כי אם $\langle M \rangle \notin L_1$, עוצרת לאחר לכל היותר $|Q|$ צעדים. אם כן, נבנה מ"ט M_1 המכריעה את L_1 . M_1 על קלט $\langle M \rangle$:

1. אם המחרוזת $\langle M \rangle$ אינה מקודדת מ"ט חוקית, דחה.

2. חשב את $|Q|$ - מספר המצבים ב- M .

3. הרץ את M על ϵ במשך $|Q| + 1$ צעדים או עד שעצרה.

4. M_1 תשמור על הסרט את המצבים ש- M עברה בהם בסמלויץ.
 5. נבדוק האם קיים מצב ש- M ביקרה בו פעמיים.
 6. M_1 תקבל אם קיים כזה מצב ותדחה אחרת.
- ברור כי M_1 עוצרת על כל קלט, והנכונות מובטחת מהאבחנה שלנו בתחילת השאלה.

תרגיל 2

הוכיחו/הפריכו:

$$L_2 = \{ \langle M, q \rangle \mid M \text{ visits the state } q \text{ at least twice when running on } \epsilon \} \in \text{R}$$

פתרון

הטענה לא נכונה. נראה כי $L_2 \leq_m H_{TM, \epsilon}$. צריך להראות פונקציה חשיבה $f(\langle M \rangle) = \langle M', q \rangle$ כך ש- M עוצרת על המילה הריקה אם"ם M' מבקרת במצב q לפחות פעמיים על המילה הריקה:

- M' תהיה זהה ל- M רק עם מצב נוסף q .
- אם M מקבלת או דוחה (כלומר, מגיעה למצב q_a או q_r), M' עוברת ל- q ונשארת שם לנצח.
- אין אף מעבר אחר ל- q .

כדי להוכיח נכונות, נדרש להראות:

1. הפונקציה חשיבה - קל להשתכנע כי ניתן לבנות מ"ט הכותבת את $\langle M', q \rangle$ על הסרט שלה בהנתן הקלט $\langle M \rangle$.
2. אם M עוצרת על המילה הריקה אז M' מבקרת ב- q על המילה הריקה לפחות פעמיים (בעצם, אינסוף פעמים) ו- $\langle M', q \rangle \in L_2$.
3. אם M לא עוצרת על המילה הריקה אז M' לא תגיע ל- q לעולם ו- $\langle M', q \rangle \notin L_2$.

תרגיל 3

$$L_3 = \{ \langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 1 \} \notin \text{R}$$

פתרון

נראה כי $L_3 \leq_m A_{TM}$. תהא $f(\langle M \rangle, w) = M'$ כך ש- M' על קלט x :

- אם $x \neq 1$, דחה.
- אם $x = 1$, הרץ את M על w .
- אם M קיבלה, M' תקבל. אם M דחתה, M' תדחה.

נכונות:

1. הפונקציה חשיבה.
2. אם M מקבלת את w אזי $1 \in L(M')$ ולכן $\langle M' \rangle \in L_3$.
3. אם M לא מקבלת את w אזי $L(M') = \emptyset$ ולכן $\langle M' \rangle \notin L_3$.

תרגיל 4

$$L_\infty = \{ \langle M \rangle \mid |L(M)| = \infty \} \notin \text{RE} \cup \text{coRE}$$

פתרון

נראה כי $L_\infty \notin \text{RE}$ ו- $L_\infty \notin \text{coRE}$. לאחר שנוכיח את הטענה נוכל להשתמש בעובדה שאם עבור שפה A מתקיים ש- $L_\infty \leq_m A$ אזי $A \in \text{RE} \cup \text{coRE}$.

החלק $L_\infty \notin \text{coRE}$

נראה כי $L_\infty \leq_m A_{TM}$ (זכרו כי $A_{TM} \notin \text{coRE}$ כי אחרת $A_{TM} \in \text{R}$). תהא $f(\langle M \rangle, w) = \langle M' \rangle$ כך ש- M' על קלט x :

- תתעלם מ- x ותריץ את M על w .
- M' תענה כמו M .

ואז:

1. הפונקציה חשיבה.

2. אם M מקבלת את w אז M' מקבלת את כל הקלטים ו- $\langle M' \rangle \in L_\infty$.

3. אם M לא מקבלת את w אז $L(M') = \emptyset$ ו- $\langle M' \rangle \notin L_\infty$.

החלק $L_\infty \notin \text{RE}$

נראה כי $L_\infty \leq_m \overline{A_{TM}}$ (זכרו כי $\overline{A_{TM}} \notin \text{RE}$ כי אחרת $A_{TM} \in \text{R}$). מהמשפט שלמדנו, אנו יודעים כי מספיק להראות $\overline{L_\infty} \leq_m A_{TM}$. תהא $f(\langle M \rangle, w) = \langle M' \rangle$ כך ש- M' על קלט x :

- תריץ את M על w למשך $|x|$ צעדים.
- אם M קיבלה, M' תדחה.
- אם M לא קיבלה, M' תקבל.

ואז:

1. הפונקציה חשיבה.

2. אם M מקבלת את w , נניח לאחר s צעדים, M' תקבל את כל הקלטים באורך קטן מ- s ותדחה את כל הקלטים באורך גדול מ- s . לכן, $L(M') \subseteq \overline{L_\infty}$.

3. אם M לא מקבלת את w אז M' תקבל את כל הקלטים ו- $\langle M' \rangle \notin \overline{L_\infty}$.

תרגיל 5

הוכיחו כי $IsUnary = \{\langle M \rangle \mid L(M) \subseteq \{1\}^*\} \notin \text{R}$

פתרון

נראה כי $IsUnary \leq_m \overline{A_{TM}}$. תהא $f(\langle M \rangle, w) = \langle M' \rangle$ כך ש- M' על קלט x :

- אם $x \in \{1\}^*$, קבל.
- אחרת, הרץ את M על w .
- אם M קיבלה, M' תקבל. אם M דחתה, M' תדחה.

ואז:

1. הפונקציה חשיבה.

2. אם M לא מקבלת את w , $L(M') = \{1\}^*$ ולכן $\langle M' \rangle \in IsUnary$.

3. אם M מקבלת את w אז $L(M') = \Sigma^*$ ולכן $\langle M' \rangle \notin IsUnary$.

תרגיל 6

הוכיחו/הפריכו:

$$L_{100} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ on } \epsilon \text{ does not use more than 100 places on the tape} \} \in R$$

פתרון

הטענה נכונה. נזכר כי קונפיגורציה של מ"ט היא מחרוזת uqv כך ש- $q \in Q$, $u, v \in \Gamma^*$ ומיקומו של q במחרוזת הוא כמיקומו של הראש הקורא. כמו כן, אם מ"ט חוזרת על אותה קונפיגורציה פעמיים, היא נכנסת ללולאה אינסופית. אם $\langle M \rangle \in L_{100}$, כמה קונפיגורציות אפשריות יש ל- M ? צריך לבחור את המצב הנוכחי, מיקום הראש הקורא ותוכן הסרט. אם כך, $a(M) = |Q| \cdot 100 \cdot |\Gamma|^{100}$, נבנה מ"ט M' שתכריע את L_{100} על M' קלט $\langle M \rangle$:

- אם המחרוזת $\langle M \rangle$ אינה מקודדת מ"ט חוקית, דחה.
- חשב את $|Q|$ ו- $|\Gamma|$ עבור M .
- הרץ את M על ϵ למשך $a(M) + 1$ צעדים או עד ש- M עוצרת.
- אם M השתמשה ביותר מ- 100 תאים, דחה.
- אחרת, קבל.

ברור כי M' תמיד עוצרת. כעת:

1. אם M' מקבלת, אז מתקיים אחד מהשניים:

- (א) על M ϵ עצרה ולא השתמשה ביותר מ- 100 תאים.
- (ב) על M ϵ תוך $a(M) + 1$ צעדים ולא השתמשה ביותר מ- 100 תאים בסרט. לכן, M היא בלולאה אינסופית ולא תשתמש בתאים שלא השתמשה בהם קודם.

2. אם M' דחתה, אז M השתמשה ביותר מ- 100 תאים.

מכאן, ש- M' מכריעה את L_{100} (היא תמיד עוצרת ועונה כנדרש).