מודלים חישוביים
תרגול מס' 1

14 במרץ 2015

נושאי התרגול:

- אותיות, מילים ושפות.
- אוטומט סופי דטרמיניסטי (DFA).

1 אותיות, מילים ושפות

- אות הינה סימן כלשהו. לדוגמא: $\$ = \sigma$ או $\delta = a$.
- אלפבית הינו קבוצה סופית לא ריקה של אותיות. לדוגמא: $\Sigma = \{0,1\}$ או $\Delta = \{a,b,c\}$.
- מילה מעל א"ב Σ הינה סדרה סופית של אותיות מ־ Σ. לדוגמא: $w = abbbca$ היא מילה מעל $\Sigma = \{a,b,c\}$. נסמן ב־ ϵ את המילה הריקה. אורך של מילה, $|w|$, הוא מספר האותיות בה.
- שפה הינה קבוצה סופית או אינסופית של מילים מעל א"ב נתון. דוגמאות מעל הא"ב $\Sigma = \{0,1\}$:
  - $L_1 = \{\epsilon, 00, 11, 010\}$.
  - $L_2 = \emptyset$.
  - $L_3 = \{\epsilon, 0, 00, 000, \ldots\}$.
- מסמנים את שפת כל המילים מעל הא"ב Σ ב־ $\Sigma^\star$. אם כך, קבוצת כל השפות היא $\mathcal{P}\left(\Sigma^\star\right)$.

פעולות על מילים:

- שרשור – הדבקת מילים אחת אחרי השנייה. השרשור של w_1 ו־ w_2 יסומן פשוט כ־ w_1w_2.
- חזקה – חזקה i של מילה w היא המילה המתקבלת משרשור w לעצמה i פעמים. נוכל אם כך לכתוב: $L_3 = \left\{0^i \mid i \geq 0\right\}$.
- היפוך – הפיכת סדר האותיות במילה. ההיפוך של w יסומן כ־ w^R.

פעולות על שפות:

- משלים – עבור שפה L, $\bar{L} = \Sigma^\star \setminus L$. דוגמא: עבור א"ב $\Sigma = \{a,b\}$ ו־ $L_4 = \{aw \mid w \in \Sigma^\star\}$, $\bar{L}_4 = \{bw \mid w \in \Sigma^\star\} \cup \{\epsilon\}$.
- שרשור – עבור שתי שפות A_1, A_2 נגדיר $A_1 \circ A_2 = \{w_1w_2 \mid w_1 \in A_1 \wedge w_2 \in A_2\}$. דוגמא: עבור א"ב $\Sigma = \{0,1\}$, $A_1 = \left\{0^{2i} \mid i \geq 0\right\}$ ו־ $A_2 = \left\{1^{3i} \mid i \geq 0\right\}$, $A_1 \circ A_2 = \left\{0^{2i}1^{3j} \mid i,j \geq 0\right\}$. בדומה נגדיר חזקה. באופן דומה לחזקה של מילים, נגדיר גם חזקה של שפות.
- איחוד וחיתוך – עבור שתי שפות A_1, A_2 נגדיר $A_1 \cup A_2 = \{w \mid w \in A_1 \vee w \in A_2\}$, ובדומה נגדיר חיתוך.

- <u>סגור קליני</u> – כל המילים שניתן ליצור משרשור מילים בשפה. עבור שפה L, נסמן:

$$L^{\star}=\{w_1w_2\dots w_k \mid \forall i.w_i\in L\}=\bigcup_{k\geq 0}L^k$$

  – לכל L, $\epsilon\in L^{\star}$.
  – שני המקרים היחידים שהסגור יחזיר קבוצה סופית: $\{\epsilon\}^{\star}=\emptyset^{\star}=\{\epsilon\}$.
  – עבור $L=\{00000,000\}$, $L^{\star}=\left\{0^{5i+3j}\mid i,j\geq 0\right\}$.

תרגיל 1

הוכיחו/הפריכו:

1. לכל שלוש שפות L_1,L_2,L_3 מתקיים ש־ $(L_1\cap L_2)\circ L_3=(L_1\circ L_3)\cap(L_2\circ L_3)$.
2. $uv\in L_1\circ L_2$ אם"ם $u\in L_1\wedge v\in L_2$.

פתרון

1. הטענה לא נכונה (הוכיח לבד כי אם היינו מחליפים את החיתוך באיחוד אז הטענה דווקא כן היתה נכונה). נבחר $\Sigma=\{a\}$, $L_1=\{a\}$, $L_2=\{aa\}$ ו־ $L_3=\{\epsilon,a\}$. אזי,

$$\begin{aligned}(L_1\cap L_2)\circ L_3 &= \emptyset\circ L_3=\emptyset\\ (L_1\circ L_3)\cap(L_2\circ L_3) &= \{a,aa\}\cap\{aa,aaa\}=\{aa\}\end{aligned}$$

2. הטענה לא נכונה. מעל אותו א"ב, נבחר $L_1=L_2=\{a\}$. אזי, $L_1\circ L_2=\{aa\}$. נבחר $u=\epsilon$ ו־ $v=aa$. אזי, $uv=aa\in L_1\circ L_2$ אך $u\notin L_1$ למשל.

2 אוטומט סופי דטרמיניסטי

הגדרה 2.1 אס"ד A הוא חמישייה $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ כך ש:

- Q הינה קבוצה סופית של מצבים.
- Σ הינו א"ב הקלט.
- $\delta:Q\times\Sigma\to Q$ הינה פונקצית המעברים.
- $q_0\in Q$ מצב התחלתי (יחיד).
- $F\subseteq Q$ הינה קבוצת מצבים מקבלים.

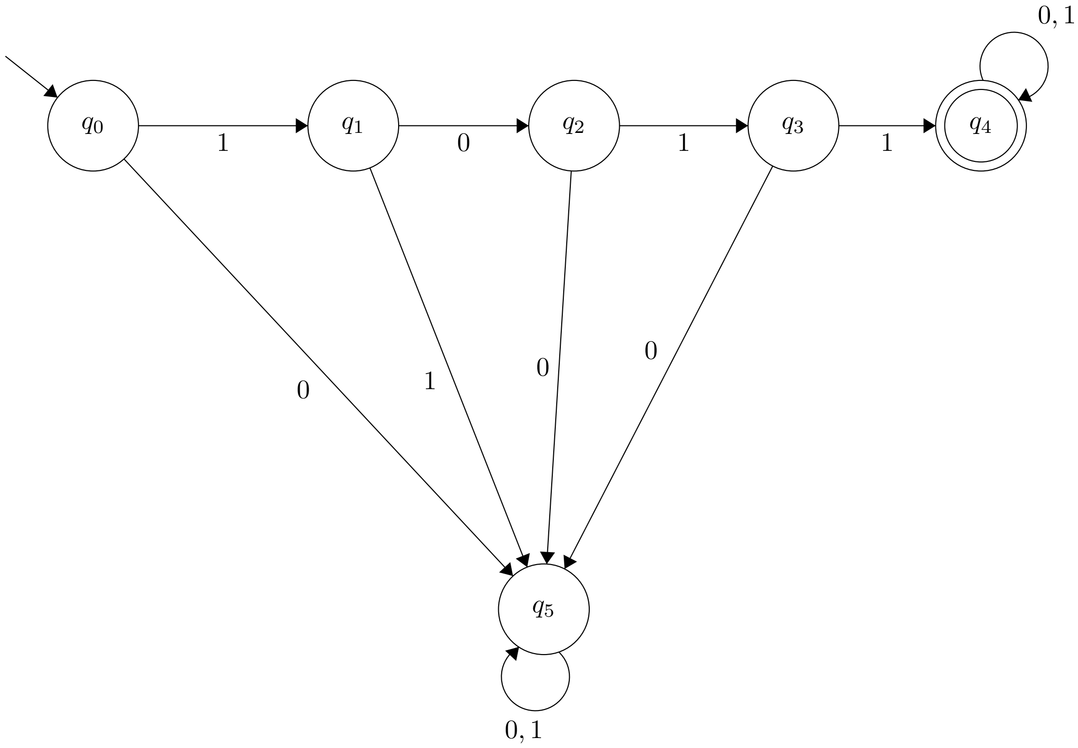
הגדרה 2.2 נגיד ש־ M מקבל את $w\in\Sigma^{\star}$ אם $\hat{\delta}(q_0,w)\in F$ כך ש־ $\hat{\delta}$ היא פונקצית המעברים המורחבת שהגדרנו בהרצאות.

הגדרה 2.3 תהא A קבוצת המילים ש־ M מקבל. נסמן: $L(M)=A$ כשפה ש־ M מקבל (או, מזהה).

הגדרה 2.4 שפה L היא רגולרית אם קיים אס"ד המקבל אותה.

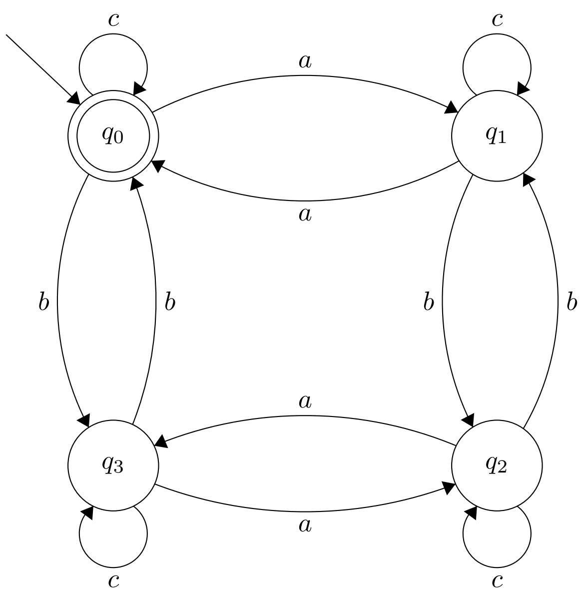
דוגמא 1

אס"ד מעל הא"ב $\Sigma = \{0,1\}$ המקבל את שפת כל המילים המתחילות ב־ 1011.



דוגמא 2

אס"ד מעל הא"ב $\Sigma = \{a,b,c\}$ המקבל את השפה $L = \{w \in \Sigma^\star \mid \#_a(w) \ \text{ is even} \wedge \#_b(w) \ \text{ is even}\}$.



נשים לב שבהגיענו ל־ q_1 ראינו מספר א"ז של a־ים ומספר זוגי של b־ים, בהגיענו ל־ q_2 ראינו מספר א"ז של a־ים ו־ b־ים ובהגיענו ל־ q_3 ראינו מספר זוגי של a־ים ומספר א"ז של b־ים.

דוגמא 3

תיאור פורמלי לאס"ד מעל הא"ב $\{0,1\}$ המקבל את שפת כל המילים המסתיימות ב־ 00:

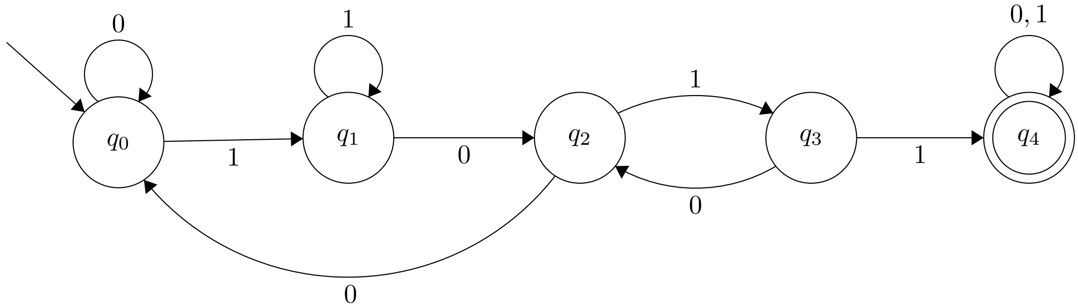
$$\begin{aligned} M &= (Q,\Sigma,\delta,q_0,F) \\ &= (\{q_0,q_1,q_2\},\{0,1\},\delta,q_0,\{q_2\}) \end{aligned}$$

כך ש־ δ מוגדרת כך:

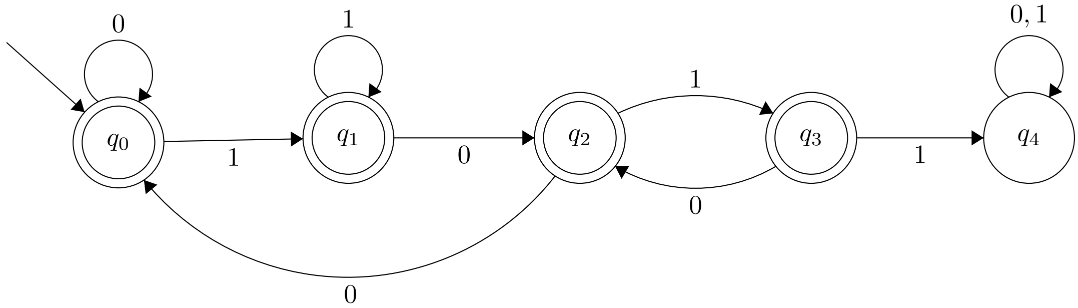
$$\begin{array}{ll} \delta(q_0,0)=q_1 & \delta(q_0,1)=q_0 \\ \delta(q_1,0)=q_2 & \delta(q_1,1)=q_0 \\ \delta(q_2,0)=q_2 & \delta(q_2,1)=q_0 \end{array}$$

דוגמא 4

נראה כי שפת כל המילים מעל הא"ב $\{0,1\}$ שלא מכילות 1011 היא רגולרית. נבנה תחילה אוטומט לשפה המשלימה – שפת כל המילים מעל הא"ב $\{0,1\}$ שמכילות 1011:



כעת נשים לב שהשפה המשלימה מתקבלת ע"י היפוך המצבים המקבלים. במקרה שלנו:



תרגיל 2

הוכיחו כי שפות רגולריות סגורות תחת משלים.

פתרון

זוהי טענה פורמלית של מה שכבר ראינו בדוגמא הקודמת. תהא L שפה רגולרית. אזי, קיים אס"ד $M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ כך ש־ $L(M)=L$. נגדיר M' כך:

$$M' = (Q,\Sigma,\delta,q_0,Q\backslash F)$$

ומתקיים ש:

$$w\in\bar{L} \Leftrightarrow w\notin L \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0,w)\notin F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0,w)\in Q\backslash F \Leftrightarrow w\in L(M')$$

ולכן $L(M')=\bar{L}$, כנדרש (שימו לב שהוכחנו בעצם הכלה דו־כיוונית).

תרגיל 3

הוכיחו כי שפות רגולריות סגורות תחת חיתוך.

פתרון

יהיו L_1, L_2 שפות רגולריות. אזי, קיימים אוטומטים סופיים דטרמינסטיים

$$\begin{aligned} M_1 &= \left(Q^1, \Sigma, \delta^1, q_0^1, F^1\right) \\ M_2 &= \left(Q^2, \Sigma, \delta^2, q_0^2, F^2\right) \end{aligned}$$

כך ש־ $L(M_1) = L_1$ ו־ $L(M_2) = L_2$. נרצה לבנות אס"ד $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כך ש־ $L(M) = L_1 \cap L_2$.
באופן לא פורמלי, M יסמלץ "ריצה במקביל" על M_1 ו־ M_2 ויקבל אם הגענו למצב מקבל בשני האוטומטים גם יחד. פורמלית:

- $Q = Q^1 \times Q^2$.
- $q_0 = \left(q_0^1, q_0^2\right)$.
- לכל $q_1 \in Q^1, q_2 \in Q^2, \sigma \in \Sigma$, $\delta\left(\left(q_1, q_2\right), \sigma\right) = \left(\delta^1\left(q_1, \sigma\right), \delta^2\left(q_2, \sigma\right)\right)$.
- $F = F^1 \times F^2 = \left\{\left(q_1, q_2\right) \mid q_1 \in F^1 \wedge q_2 \in F^2\right\}$.

נוכיח תחילה טענת עזר:

טענה 2.5 לכל $w \in \Sigma^\star$ ו־ $(q_1, q_2) \in Q$, $\hat{\delta}\left(\left(q_1, q_2\right), w\right) = \left(\hat{\delta}^1\left(q_1, w\right), \hat{\delta}^2\left(q_2, w\right)\right)$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על $|w|$. עבור $|w| = 0$, כלומר $w = \epsilon$, מתקיים ש־

$$\hat{\delta}\left(\left(q_1, q_2\right), w\right) = \left(q_1, q_2\right) = \left(\hat{\delta}^1\left(q_1, w\right), \hat{\delta}^2\left(q_2, w\right)\right)$$

נניח את נכונות הטענה עבור $|w| < n$ ותהא $w = u\sigma$ כך ש־ $|w| = n$. אזי:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}\left(\left(q_1, q_2\right), w\right) &= \hat{\delta}\left(\left(q_1, q_2\right), u\sigma\right) \\ &= \delta\left(\hat{\delta}\left(\left(q_1, q_2\right), u\right), \sigma\right) \\ &= \delta\left(\left(\hat{\delta}^1\left(q_1, u\right), \hat{\delta}^2\left(q_2, u\right)\right), \sigma\right) \\ &= \left(\delta^1\left(\hat{\delta}^1\left(q_1, u\right), \sigma\right), \delta^2\left(\hat{\delta}^2\left(q_2, u\right), \sigma\right)\right) \\ &= \left(\hat{\delta}^1\left(q_1, w\right), \hat{\delta}^2\left(q_2, w\right)\right) \end{aligned}$$

■

כעת נחזור להוכחת הטענה המקורית, ש־ $L(M) = L_1 \cap L_2$:

$$\begin{aligned} w \in L(M) &\Leftrightarrow \hat{\delta}\left(q_0, w\right) \in F \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}\left(\left(q_0^1, q_0^2\right), w\right) \in F \\ &\Leftrightarrow \left(\hat{\delta}^1\left(q_0^1, w\right), \hat{\delta}^2\left(q_0^2, w\right)\right) \in F^1 \times F^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\hat{\delta}^1\left(q_0^1, w\right) \in F^1\right) \wedge \left(\hat{\delta}^2\left(q_0^2, w\right) \in F^2\right) \\ &\Leftrightarrow w \in L(M_1) \wedge w \in L(M_2) \\ &\Leftrightarrow w \in L(M_1) \cap L(M_2) \\ &\Leftrightarrow w \in L_1 \cap L_2 \end{aligned}$$

וסיימנו. הוכחה חלופית תוך שימוש בסגירות שפות רגולריות לאיחוד ומשלים – שימוש בדה־מורגן: $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.