תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

סהכ	5	4	3	2	1

מבחן מועד ב' - מודלים חישוביים, סמסטר ב' תשע"ה (2015)

פתרון

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' רונית רובינפלד, דר' יפתח הייטנר

מתרגלים: יובל מוסקוביץ', אורן זלצמן, דין דורון

9/8/15

הוראות

1. מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.
2. משך הבחינה – שלוש שעות.
3. חומר עזר מותר: שני דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד עם שם התלמיד/ה.
4. **יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה).** מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיוטה בלבד.
5. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
6. במבחן 5 שאלות.
   - הניקוד לכל שאלה מופיע לידה מספר השאלה. ציון המבחן ישוקלל לפי הנוסחא הבאה:
     - ציון שתי התשובות הטובות ביותר יוכפל ב 1.25
     - ציון התשובה הגרועה ביותר יוכפל ב 0.5
   - סימון "תשובה ריקה" יזכה בחלק (קטן) מהנקודות כמצוין ליד מספר השאלה.
   - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון.
   - יש לענות תשובות ברורות ענייניות ותמציתיות.
7. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה או בתרגול) בתנאי שמצטטים אותה במדויק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בתרגיל בית, בהרצאות מהסמסטר הקודם, וכו') יש להוכיח.
8. יש להניח $P \neq NP$, אלא אם מצוין אחרת.

בהצלחה!

תעודת זהות: ____________________

מספר מחברת: ____________________

שאלה 1 (20 נקודות).
אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

בשאלה זו יש שני סעיפים.

א. יהי D DFA בעל n מצבים. הוכח כי $L(D)$ אינה ריקה אם ורק אם D מקבל לפחות מילה אחת באורך קטן (ממש) מ- n.

ברור כי אם קיימת מילה שמתקבלת אז $L(D)$ אינה ריקה. בכיוון השני, נניח כי $L(D)$ אינה ריקה, ותהא $w \in L(D)$ מילה באורך קצר ביותר. נניח בשלילה ש- $|w| \geq n$. אזי, w מקיימת את למת הניפוח ולכן קיים פירוק $w = xyz$ כך ש- y לא ריקה, ולכל i מתקיים $xy^iz \in L(D)$. עבור $i = 0$ מתקיים $xz \in L(D)$ ו- $|xz| < |w|$, בסתירה למינימליות.

ב. יהא G דקדוק ח"ה בצורה הנורמלית של חומסקי (CNF) בעל n משתנים. הוכיחו: $L(G)$ אינסופית אם ורק אם קיימת $w \in L(G)$ כך ש- $2^n < |w| \leq 2 \cdot 2^n$.

ראו פתרון בתרגיל מס' 3.

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

שאלה 2 (20 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

נרצה להוכיח שהשפה $L_1 = \{a^n b a^n : n \geq 0\}$ אינה רגולרית ע"י שימוש בסגירות של שפות רגולריות וע"י שימוש בעובדה שהשפה $L_2 = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ אינה רגולרית.

א. נסתכל על ההומומורפיזם $h: \{a,b,c\} \to \{a,b,c\}^*$ כך ש- $h(a) = a$, $h(b) = b$ ו- $h(c) = a$.

מהי $h^{-1}(L_1)$?

$h^{-1}(L_1) = \{u \cdot b \cdot v : |u| = |v| \wedge u, v \in \{a,c\}^*\}$

ב. כעת נרצה לבצע חיתוך עם שפה רגולרית L_{reg}

כך ש- $L_{reg} \cap h^{-1}(L_1) = \{a^n b c^n : n \geq 0\}$. מיהי L_{reg} ?

$L_{reg} = L(a^* b c^*)$

ג. לבסוף נרצה להשתמש בהומומורפיזם נוסף $g: \{a,b,c\} \to \{0,1\}^*$ כך ש- $g\left(L_{reg} \cap h^{-1}(L_1)\right) = L_2$. מיהו g ?

$g(a) = 0,\ g(b) = \varepsilon,\ g(c) = 1$

ד. בהסתמך על נכונות הסעיפים הקודמים, השלימו את ההוכחה כי L_1 אינה רגולרית.

נניח בשלילה ש- L_1 רגולרית. אזי, מסגירות שפות רגולריות להומומורפיזם הפוך, חיתוך וההומומורפיזם נקבל כי גם L_2 רגולרית, בסתירה.

תעודת זהות: ____________________

מספר מחברת: ____________________

שאלה 3 (20 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

הגדרה : שני גרפים לא מכוונים $G_1 = (V_1, E_1)$ ו $G_2 = (V_2, E_2)$ הם *isomorphic* (איזומורפיים),
אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f: V_1 \mapsto V_2$ כך ש $(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2$.
G_1 ו G_2 הם *k- isomorphic*, אם קיימות קבוצות $E_1' \subseteq E_1$ ו $E_2' \subseteq E_2$ בגדל k,
כך ש $G'_1 = (V_1, E'_1)$ ו $G'_2 = (V_2, E'_2)$ הם איזומורפיים.

יהי $Iso = \{< G_1, G_2, k >: G_1\ and\ G_2\ are\ k - isomprphic\}$. נראה כי Iso היא ב NPC.

א. הוכח כי Iso היא ב NP.

העד הוא פונקציית מיפוי f ו E_1 , $E_2' \subseteq E_2$.
המוודא בודק שהקבוצות הן בגדל k, ו ש f היא איזומורפיזם בין $G'_1 = (V_1, E'_1)$ ו $G'_2 = (V_2, E'_2)$ ($(u, v) \in E'_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E'_2$).

ב. מצא שפה L עליה הראינו (בשיעור, תרגול או שיעורי הבית) שהיא ב NPC, והוכח כי $L \leq_p Iso$.

1. השפה והרדוקציה:

*L היא CLIQUE', והרדוקציה היא f(<G,K>) מחזירה <G,G',0.5*k*(k-1)>, כאשר G' הוא גרף עם אותו מספר קודקודיים כמו ל G, המכיל קליק בגדל K, ואף קשת אחרת (אם k גדול ממספר קודקודי G, G' נקבע לגרף הריק).*

2. הוכחת נכונות הרדוקציה:

ברור כי הרדוקציה f חשיבה בזמן פולינומי.
אם $< G, K > \in Clique$, אזי הקשתות E'_1 של הקליק, הקשתות E_2 של G', ו f הממפה את קודקודי הקליק ב G לקודקודי הקליק ב G', הם עדות לכך ש $f(< G, K >) = < G, G', 0.5 * k * (k - 1) > \in Iso$.
אם $f(< G, K >) = < G, G', 0.5 * k * (k - 1) > \in Iso$, אזי קל לראות ש f^{-1} של קודקודי הקליק ב G' מהווים קליק בגודל ל ב G. כלומר $< G, K > \in Clique$.

תעודת זהות: ______________________________

מספר מחברת: ______________________________

שאלה 4 (20 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

תהי $L = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset \}$.

א. הוכח כי $L \notin \mathcal{RE}$ (15 נק'):

נראה רדוקציה $\overline{\mathrm{A_{TM}}} \leq_m \mathrm{L}$

בהינתן קלט $\langle \mathrm{M, w} \rangle$ פונקצית הרדוקציה f תחזיר את $\langle \mathrm{M_w, M_w} \rangle$ כאשר $\mathrm{M_w}$ היא מ"ט המתעלמת מהקלט שלה, מריצה את M על w, ומקבלת אם M מקבלת.

נכונות:

- f חשיבה. בהינתן M ו w ניתן לבנות את $\mathrm{M_w}$.
- $\langle \mathrm{M, w} \rangle \in \overline{\mathrm{A_{TM}}} \Leftarrow$ M לא מקבלת את w, ולכן $\mathrm{L(M_w)} = \emptyset \Leftarrow \mathrm{L(M_w)} \cap \mathrm{L(M_w)} = \emptyset \Leftarrow \langle \mathrm{M_w, M_w} \rangle \in \mathrm{L}$
- $\langle \mathrm{M, w} \rangle \notin \overline{\mathrm{A_{TM}}} \Leftarrow$ M מקבלת את w, ולכן $\mathrm{L(M_w)} = \Sigma^* \Leftarrow \mathrm{L(M_w)} \cap \mathrm{L(M_w)} = \Sigma^* \Leftarrow \langle \mathrm{M_w, M_w} \rangle \notin \mathrm{L}$

ראינו בכיתה ש $\overline{\mathrm{A_{TM}}} \notin \mathrm{RE}$ ולכן $\mathrm{L} \notin \mathrm{RE}$

ב. האם $L \in \mathrm{co} - \mathcal{RE}$? נמק. (5 נק')

כן, כי קיימת מ"ט M א"ד שמקבלת את $\bar{\mathrm{L}}$.

בהינתן קלט x, M תבצע:

1. תבדוק אם x מהצורה $\langle \mathrm{M_1, M_2} \rangle$. אם לא תקבל.
2. אחרת, תבחר באופן א"ד מחרוזת w ותריץ את $\mathrm{M_1}$ ו- $\mathrm{M_2}$ על w במקביל (צעד, צעד). אם שתיהן קיבלו, M תקבל.

תעודת זהות: ____________________________

מספר מחברת: ____________________________

שאלה 5 (20 נקודות).

אינני עונה על השאלה (תשובה ריקה) ☐ (5 נקודות)

עבור כל אחת מהשפות הבאות, קבעו האם היא נמצאת ב- $\mathcal{R}$, ב- $\mathcal{R} \setminus \mathcal{RE}$ או שאינה ב- $\mathcal{RE}$. הוכיחו תשובתכם.

א. $L_1 = \left\{\langle M \rangle \mid M \text{ is a TM and } L(M) \in \overline{\mathcal{RE}}\right\}$, כאשר $\overline{\mathcal{RE}} = \{L \subseteq \Sigma^\star \mid L \notin \mathcal{RE}\}$ (6 נק').

השפה היא ב- $\mathcal{R}$. לכל קידוד חוקי של מ"ט $\langle M \rangle$ מתקיים, לפי ההגדרה, ש- $L(M) \in \mathcal{RE}$. לכן, בכל מקרה השפה L_1 היא השפה הריקה, שהיא כמובן כריעה.

ב. $L_2 = \left\{\langle M \rangle \mid M \text{ is a Turing machine and } \overline{L(M)} \notin \mathcal{RE}\right\}$ (7 נק').

השפה אינה ב- $\mathcal{RE}$. תהא M_ε מ"ט המקבלת את השפה $H_{TM,\varepsilon}$. נראה רדוקציה $\overline{H_{TM,\varepsilon}} \leq_m L_2$. הרדוקציה תהיה $f(\langle M \rangle) = \langle M' \rangle$ כך ש- M' על קלט x:

- מריצה את M על ε למשך $|x|$ צעדים. אם עצרה – דוחה.
- מריצה את M_ε על ε ועונה כמוהה.

נכונות:

- ברור כי f חשיבה.
- אם $\langle M \rangle \in \overline{H_{TM,\varepsilon}}$ אז M' עונה כמו M_ε ולכן $L(M') = H_{TM,\varepsilon}$ ואכן $\overline{H_{TM,\varepsilon}} \notin \mathcal{RE}$ ו- $\langle M' \rangle \in L_2$.
- אם $\langle M \rangle \notin \overline{H_{TM,\varepsilon}}$ אז M' מקבלת לכל היותר מספר סופי של מילים, $L(M') \in \mathcal{R}$ ומסגירות למשלים גם $\overline{L(M')} \in \mathcal{R}$ ובסה"כ $\langle M' \rangle \notin L_2$.

ג. $L_2 = \{\langle D \rangle \mid D \text{ is a DFA and there exists } w \text{ s.t. } w \in L(D) \text{ and } w^R \in L(D)\}$ (7 נק').

השפה היא ב- $\mathcal{R}$. שימו לב ש-

$\langle D \rangle \in L_2 \Leftrightarrow \exists w. w \in L \land w \in L^R \Leftrightarrow \exists w. w \in L \cap L^R$

לכן, בהנתן קלט $\langle D \rangle$ נוכל לבדוק שהוא קידוד חוקי של DFA ואם כן להריץ את האלגוריתם לבדיקת ריקנות של DFA על DFA המקבל את השפה $L \cap L^R$ - שאותו למדנו לבנות.