

מבחן במודלים חישוביים

סמסטר ב' התש"ע, מועד ב'

תאריך: 10.8.2010

מרצים: פרופ' רונית רובינפלד, פרופ' בני שור

מתרגלים: יהונתן ברנט, רני הוד

מומליץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.

- משך הבחינה שעתיים ו-45 דקות.
- חומר עזר מותר: שני דפי A4, כתובים משני הצדדים.
- בראש כל עמוד בטופס המבחן יש למלא מספר ת"ז ומספר מחברת; בטופס התשובות יש למלא מספר ת"ז, מספר גירסא ומספר מחברת.
- במבחן שני חלקים. בחלק הראשון שלוש שאלות פתוחות (17 + 18 + 20 ובסה"כ 55 נק') ובחלק השני 9 שאלות סגורות (5 נק' כל אחת). כדי לקבל ציון 100 בבחינה יש לענות נכונה על כל השאלות.
- תשובות לשאלות הסגורות יש לסמן במקום המתאים לכך בטופס התשובות. בכל שאלה יש לסמן תשובה יחידה.
- על התשובה לכל שאלה פתוחה להופיע במסגרת המתאימה בטופס המבחן (טופס זה). יש לענות תשובות ברורות ותמציתיות. תשובות מסורבלות או לא ניתנות פיזית לקריאה יזכו לניקוד חלקי בלבד.
- ודא/י היטב את תשובתך לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף חלק א' מצורפת מסגרת לשימוש במקרי "חירום".
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- על סעיף של שאלה פתוחה ניתן לענות "אינני יודע/ת" כתשובה; על סעיף זה יינתנו 20% מהנקודות (מעוגל למעלה). במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתרגול או בתרגיל הבית) בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק. טענות שהוכחו במקום אחר (כגון: בספר הלימוד, בויקיפדיה, ב-MIT, בסמסטר קודם) יש להוכיח מחדש.
- אלא אם נאמר אחרת במפורש, כל המספרים המופיעים בשאלות הם שלמים, אי-שליליים ונתונים בייצוג בינארי.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה. אין צורך להגדיר במדויק את פונקצית המעברים δ אלא אם השאלה מבקשת זאת במפורש.
- בכל השאלות ניתן להניח כי $\mathcal{NP} \neq \text{co-}\mathcal{NP}$ ו- $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ אלא אם השאלה מציינת אחרת.

בהצלחה!

		1
		2
	ב3	א3

חלק I

שאלה 1 (17 נק')

נסמן $A = \{ \langle M_1, M_2, M_3 \rangle : L(M_1) \cap L(M_2) = L(M_3) \}$.
 לאיזו מחלקה שייכת השפה A ? הוכח/הוכיחי את קביעתך.

תשובה (יש להקיף בעיגול): \mathcal{R} $\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$ $\text{co-RE} \setminus \mathcal{R}$ $\overline{\mathcal{RE} \cup \text{co-RE}}$

הוכחה:

שאלה 2 (18 נק')

נגדיר מודל חישובי חדש בשם אוטומט תור. זהו אוטומט סופי לא דטרמיניסטי המצויד במבנה נתונים מסוג תור FIFO¹. פרט להבדל במבנה הנתונים, האוטומט מתנהג בדיוק כמו אוטומט מחסנית. האם מחלקת השפות הניתנות לקבלה ע"י אוטומט תור היא מחלקת השפות חסרות ההקשר? נמקי את קביעתך.

תשובה (יש להקיף בעיגול): אמת/שקר

הוכחה/דוגמא נגדית:

¹כלומר, הכנסת איברים היא בסוף התור והוצאת/קריאת איברים היא מראש התור.

שאלה 3 (20 נק')

הגדרה: בהנתן קבוצה S של מספרים בקטע $[0, 1]$, נאמר שניתן לארוז אותם ב- k תאים אם יש חלוקה של המספרים ל- k קבוצות כך שסכום כל קבוצה אינו עולה על 1.

דוגמא: את הקבוצה $S = \{0.2, 0.5, 0.6, 0.7, 0.9\}$ לא ניתן לארוז בשלושה תאים (למרות שהסכום הכולל קטן מ-3) אך כן ניתן לארוז בארבעה תאים.

הוכח/הוכיחי כי בעית ההכרעה הבאה היא \mathcal{NP} -שלמה.

- בהנתן קבוצה S של מספרים בקטע $[0, 1]^2$ ומספר טבעי k , האם ניתן לארוז את S ב- k תאים?

ראשית, הוכח/הוכיחי שהבעיה היא \mathcal{NP} -קשה; שנית, הראה/הראי שהבעיה שייכת ל- \mathcal{NP} .

סעיף א' (12 נק')

הוכחת \mathcal{NP} -קושי:

²משיקולי ייצוג, כל המספרים ב- S הם רציונליים וכל אחד מהם מתואר ע"י ייצוג בינארי של המונה והמכנה שלו.

סעיף ב' (8 נק')

הוכחת שייכות ל- \mathcal{NP} :

מסגרת "חירום" לשאלה פתוחה מספר _____, סעיף _____:

חלק II

1. יהיה M_0, M_1, M_2, \dots מספור כלשהו של כל מכונות הטיורינג מעל א"ב Σ . לאיזו מחלקה שייכת השפה $A = \{ \langle M_i \rangle : \exists j > i \ L(M_j) = \Sigma^* \}$?

(א) \mathcal{R} .

(ב) $\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

(ג) $\text{co-}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

(ד) $\overline{\mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}}$.

2. יהיה M_0, M_1, M_2, \dots מספור כלשהו של כל מכונות הטיורינג מעל א"ב Σ . לאיזו מחלקה שייכת השפה $B = \{ \langle M_i \rangle : \exists j < i \ L(M_j) = \Sigma^* \}$?

(א) \mathcal{R} .

(ב) $\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

(ג) $\text{co-}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

(ד) $\overline{\mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}}$.

3. נגדיר את בעיית 10-INTEGERPROGRAMMING באופן הבא. הקלט S הוא מערכת ליניארית של אי-שוויונים במשתנים עם מקדמים שלמים, לדוגמא:

$$17x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$165x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 1$$

הקלט S שייך לשפה אם יש פתרון למערכת שבו ערכי כל המשתנים הם שלמים ומקיימים $|x_i| \leq 10$. לאיזו מחלקה שייכת השפה 10-INTEGERPROGRAMMING?

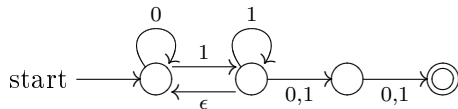
(א) \mathcal{P} .

(ב) $\mathcal{NP} \cap \text{co-}\mathcal{NP}$.

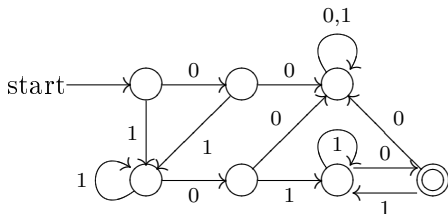
(ג) \mathcal{NPC} .

(ד) $\mathcal{R} \setminus \mathcal{NP}$.

4. שלושה מארבעת הבאים מגדירים את אותה השפה. מיהו יוצא הדופן?



(א) האוטומט הלא דטרמיניסטי



(ב) האוטומט הדטרמיניסטי

(ג) הביטוי הרגולרי $R = (0 \cup 1)^* 1 (0 \cup 1) (0 \cup 1)$

(ד) הדקדוק חסר ההקשר $G = \{ S \rightarrow 0S | 1S | 1T, T \rightarrow 0U | U1 | 10, U \rightarrow 0 | 1 \}$

5. תהינה A, B, C שפות ונתון כי $A \leq_m B \leq_p C$ וכן כי $B \in \mathcal{P} \setminus CFL$. איזו מהאפשרויות הבאות נכונה?

(א) $A \in \mathcal{P}$

(ב) $C \in \mathcal{P}$

(ג) $C \neq \emptyset$

(ד) אף אחת מהתשובות א'-ג' אינה נכונה.

6. נאמר שגרף לא מכוון $G = (V, E)$ ניתן לפירוק ל- k קליקים אם קיימת חלוקה של V ל- k חלקים שכל אחד מהם משרה קליק ב- G ; הווה אומר, אם יש קבוצות צמתים זרות V_1, V_2, \dots, V_k כך ש- $\bigcup_{i=1}^k V_i = V$ ולכל $1 \leq i \leq k$ ולכל $u, v \in V_i$ שונים מתקיים $(u, v) \in E$. לאיזו מחלקה שייכת הבעיה הבאה?

• נתון G , האם ניתן לפרק אותו ל- k קליקים?

(א) הבעיה היא ב- \mathcal{P} לכל k , גם כאשר k הוא חלק מהקלט.

(ב) כל עוד k קבוע, הבעיה ב- \mathcal{P} ; כש- k חלק מהקלט, הבעיה היא ב- $\mathcal{N}PC$.

(ג) יש $k_1 > k_2$ כך שהבעיה ב- $\mathcal{N}PC$ עבור $k = k_1$ וב- \mathcal{P} עבור $k = k_2$.

(ד) הבעיה היא ב- $\mathcal{N}PC$ לכל k קבוע.

7. תהי $L \subseteq \{0, 1\}^3$ שפה לא ריקה של מילים באורך 3. נסמן ב- n_L את מספר מחלקות השקילות ביחס \sim_L . איזו מהאפשרויות הבאות נכונה?

(א) קיימת L כזו עבורה $n_L = 3$.

(ב) קיימת L כזו עבורה $n_L = 19$.

(ג) לכל L כזו מתקיים $6 \leq n_L \leq 18$.

(ד) לכל L כזו מתקיים $4 \leq n_L \leq 16$.

8. לאיזו מחלקה שייכת הבעיה ALLSAT, המוגדרת כדקלמן?

• נתונה נוסחת CNF ϕ , האם יש לה השמה כך שבכל פסוקית כל הליטרלים מקבלים ערך אמת?

(א) שפות סופיות.

(ב) שפות אינסופיות ב- \mathcal{P} .

(ג) $\mathcal{N}PC$.

(ד) $\text{co-}\mathcal{N}PC$.

9. נגדיר את המודל החישובי הבא: $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ כמו במ"ט רגילה אבל כאן $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\} \times \mathbb{N}$ כשהמספר הנוסף מציין כמה צעדים יש לזוז בכיוון הרצוי. למשל, אם $\delta(q, a) = (p, b, \rightarrow, 1234)$ אז המכונה תעבור ממצב q למצב p , תכתוב b על הסרט במקום ה- a ותזוז 1234 צעדים ימינה. מהי מחלקת השפות הניתנת להכרעה במודל החדש?

(א) \mathcal{R} .

(ב) מחלקה \mathcal{C} כלשהי המקיימת $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{C} \subsetneq \mathcal{RE}$.

(ג) \mathcal{RE} .

(ד) מחלקה \mathcal{C} כלשהי המקיימת $\mathcal{RE} \subsetneq \mathcal{C}$.