סהכ	5	4	3	2	1

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

בוחן אמצע במודלים חישוביים 2015 סמסטר ב'

22/5/2015

מרצים: פרופ' רונית רובינפלד, דר' יפתח הייטנר

מתרגלים: יובל מוסקוביץ', אורן זלצמן, דין דורון

הנחיות

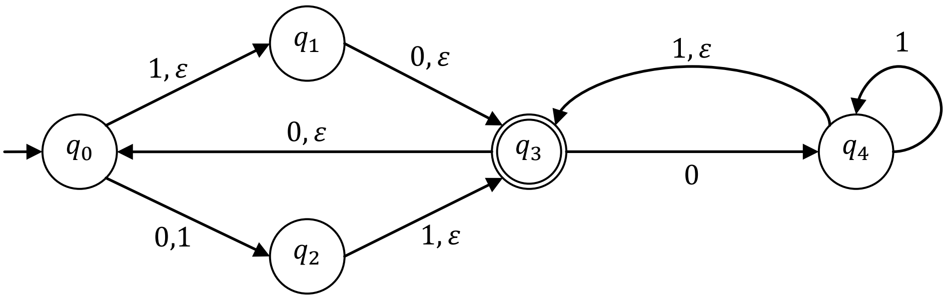
1. משך הבחינה: שעתיים.
2. בבחינה 5 שאלות.
3. ניקוד כל שאלה מופיע ליד מספר השאלה.
4. בכל מקום בו לא מצוין אחרת, הא"ב הוא $\{0,1\}$.
5. אין להשתמש בחומר עזר.
6. כתבו בקצרה!

בהצלחה!

תעודת זהות: ____________________
מספר מחברת: ____________________

שאלה 1 (20 נקודות)

א. כתוב ביטוי רגולרי (קצר ככל האפשר) עבור השפה של האוטומט הבא:



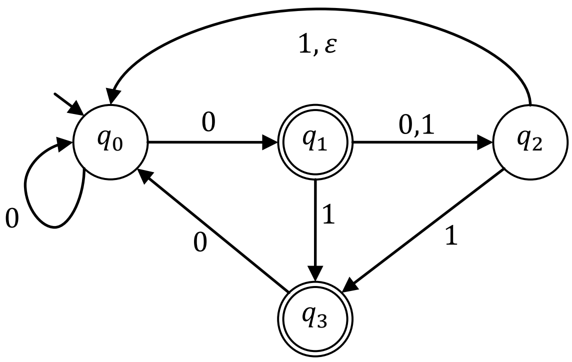
ביטוי רגולרי: $(0 \cup 1)^*$

ב. נתונה הגדרה פורמאלית של אוטומט אי דטרמיניסטי (NFA), שרטט את הדיאגרמה של האוטומט.

$$N = (Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \Sigma = \{0,1\}, \delta, q_0, F = \{q_1, q_3\})$$
δ:

	0	1	ε
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0\}$
q_3	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

דיאגרמה:

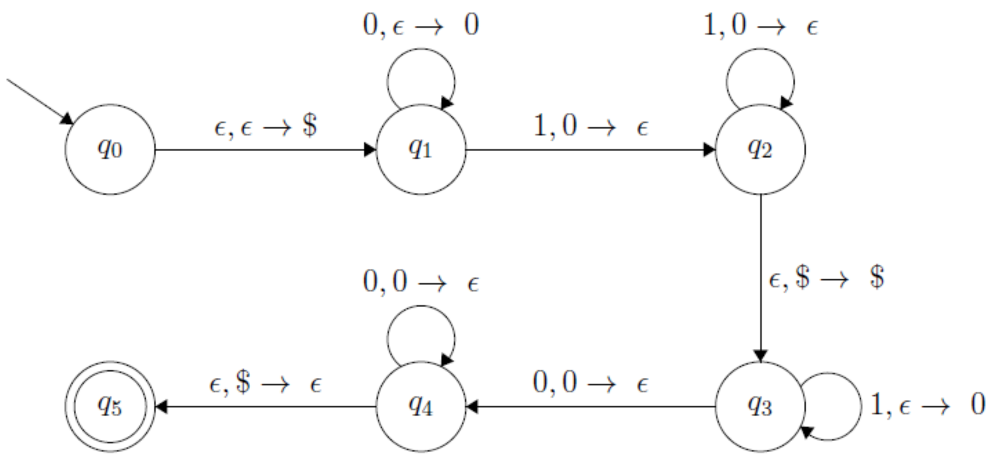


תעודת זהות: ____________________

מספר מחברת: ____________________

<u>שאלה 2 (20 נקודות)</u>

א. יהא P אוטומט המחסנית הבא:



כתוב ביטוי סגור לשפה המתקבלת על ידי האוטומט (10 נק'):

$$L(P) = \{0^n1^n1^m0^m \mid n, m \geq 1\}$$

ב. יהא $G_1 = \langle\{S, A\}, \{0,1\}, R, S\rangle$ הדקדוק אשר כלליו, R, נתונים ע"י:

$S \to \epsilon \mid A \mid AS$
$A \to 0A1 \mid 01$

כתוב ביטוי סגור לשפה המתקבלת ע"י הדקדוק (10 נק'):

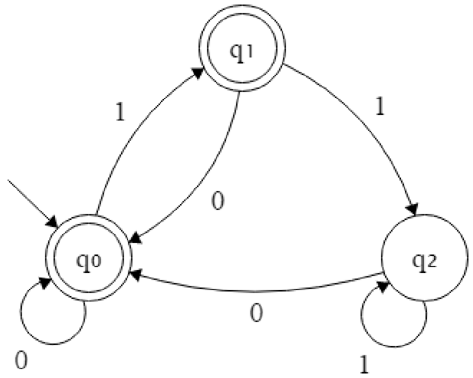
$$L(G_1) = \{0^n1^n \mid n \geq 1\}^*$$

תעודת זהות: ______________________

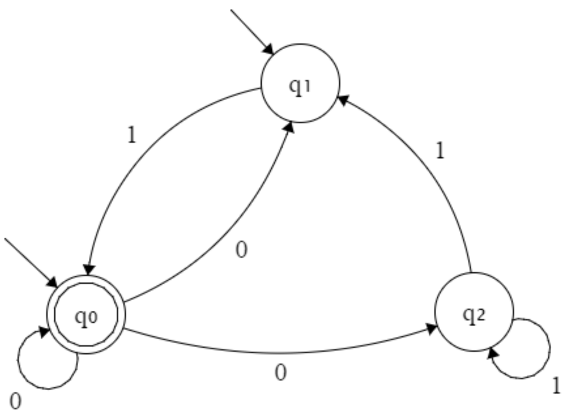
מספר מחברת: ______________________

<u>שאלה 3 (20 נקודות)</u>

שימו לב – לשאלה זו שני סעיפים בשני עמודים שונים. תהא L_1 השפה מעל הא"ב $\Sigma = \{0,1\}$ המתקבלת ע"י האוטומט הדטרמיניסטי (DFA) הבא:



א. שרטט דיאגרמה של אוטומט א"ד (NFA) המקבל את השפה L_1^R (5 נק').

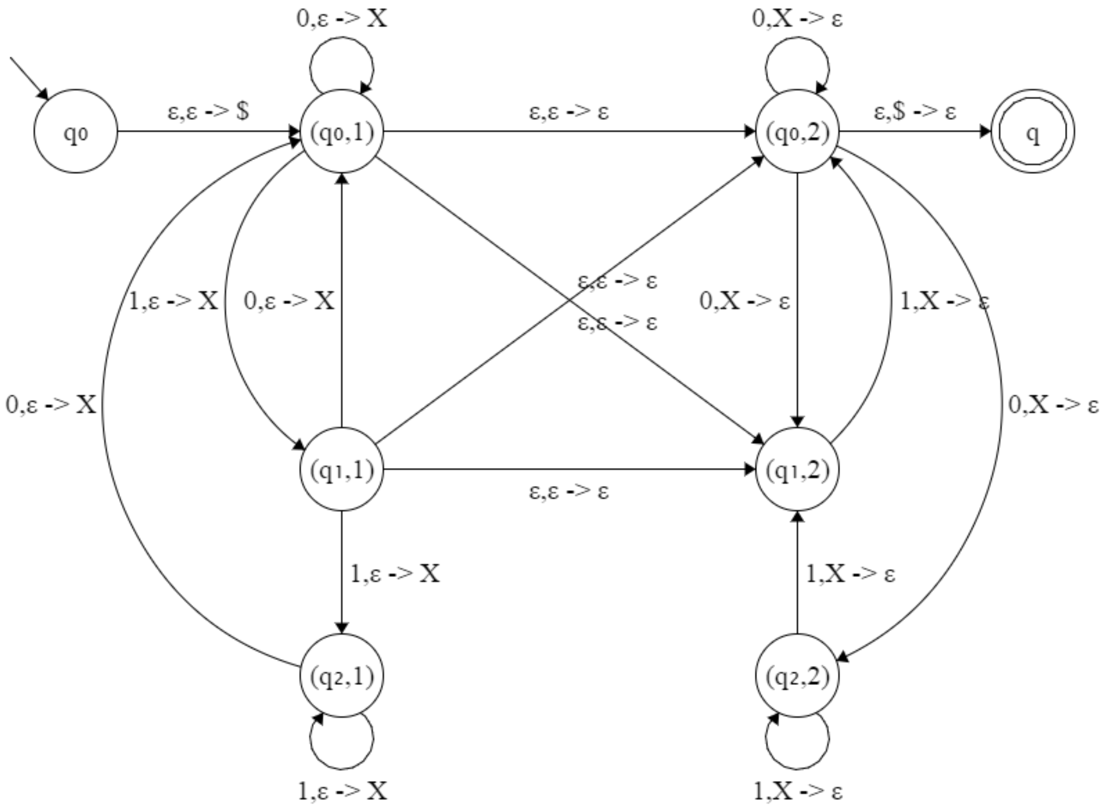


האוטומט מתקבל ע"י הפיכת כיווני החיצים. המצבים ההתחלתיים של L_1^R הם המצבים המקבלים של L_1 והמצב המקבל של L_1^R הוא המצב ההתחלתי של L_1.

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

ב. נגדיר $L_2 = \{uv \mid u \in L_1 \wedge v \in L_1^R \wedge |u| = |v|\}$. שרטט דיאגרמה של אוטומט מחסנית (PDA) המקבל את השפה L_2 (15 נק').



שימו לב ש- $(q_0,1),(q_1,1),(q_2,1)$ הם המצבים של L_1 והמעברים הם אותם מעברים, רק שבכל פעם דוחפים X למחסנית. בדומה עבור L_1^R ובכל פעם מוציאים מהמחסנית. המעבר בין תתי-האוטומטים מתבצע ע"י מעברי אפסילון בין המצבים <u>המקבלים</u> של L_1 למצבים <u>ההתחלתיים</u> של L_1^R ללא נגיעה במחסנית. נעבור למצב מקבל אם רוקנו את המחסנית ואין עוד קלט לקרוא. הבניה דומה מאוד לבנייה בשאלה 5b בתרגיל בית 3.

תעודת זהות: ______________________

מספר מחברת: ______________________

שאלה 4 (20 נקודות)

א. צטט את למת הניפוח לשפות לחסרות הקשר (5 נק')

תהי L שפה חסרת הקשר אזי קיים n>0 כך שלכל w∈L, |w|≥n קיימת חלוקה w=UVXYZ כך ש |VY|>0 ו- |VXY|≤n ולכל i≥0 מתקיים: UViXYiZ∈L.

ב. הוכח שהשפה הבאה אינה שפה חסרת הקשר (15 נק'):

$$L = \{\boldsymbol{w\#x} \mid \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}^{\star}, \boldsymbol{w} \textbf{ is a substring of } \boldsymbol{x}\}$$

נניח בשלילה שהשפה ח"ה, ויהא n∈N קבוע הניפוח. נבחר $s = a^n b^n \# a^n b^n$, ומתקיים |s|≥n וכן s∈L. בכל חלוקה של w ל- w=UVXYZ שמקיימת |VY|>0 וכן |VXY|≤n , אחת מהאפשרויות הבאות מתקיימות:

1. V או Y מכילות את התו #. נסתכל על ניפוח ע"י i=0. והמילה UV^0XY^0Z לא מכילה את התו # ולכן לא ב-L.

2. V וגם Y נמצאות משמאל לתו #. נסתכל על ניפוח ע"י i=2. ועבור המילה UV^2XY^2Z החלק משמאל לתו # ארוך מהחלק שמימון לתו # ולכן לא ב-L.

3. V וגם Y נמצאות מימין לתו #. נסתכל על ניפוח ע"י i=0. ועבור המילה UV^0XY^0Z החלק משמאל לתו # ארוך מהחלק שמימון לתו # ולכן לא ב-L.

4. V נמצא משמאל לתו # וY נמצא מימין לתו #. אזי V מכיל רק bים וY מכיל רק aים (כיון ש |VXY|≤n). נסתכל על ניפוח ע"י i=2. ועבור המילה UV^2XY^2Z מספר הbים משמאל לתו # גדול ממספר ה-bים מימין לתו # ולכן לא ב-L.

תעודת זהות: ____________________________

מספר מחברת: ____________________________

<u>שאלה 5 (20 נקודות)</u>

עבור שפה רגולרית L תהא A_L קבוצת מחלקות השקילות של היחס $\sim_L$ שהגדרנו בכיתה. כמו כן, נסמן $r(L) = |A_L|$. עבור כל אחת מהטענות הבאות, יש לענות האם היא נכונה או לא. במידה והיא נכונה, יש לנמק בקצרה. במידה והיא לא נכונה, יש להראות דוגמה נגדית מפורשת ולנמק מדוע היא אכן דוגמא נגדית.

א. תהא L שפה רגולרית. אזי, $r(L) = r(\bar{L})$.

הטענה נכונה. יהא $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ה DFA בעל מספר המצבים המינימלי המקבל את L. ממשפט מיהיל-נרוד מתקיים ש- $r(L) = |Q|$. ע"י היפוך המצבים המקבלים של M נקבל אס"ד המקבל את $\bar{L}$ ובעל אותו מספר מצבים. אם כך, מספר המצבים המינימלי של אס"ד המקבל את $\bar{L}$ (ולכן גם $r(\bar{L})$) הוא לכל היותר $r(L)$ וקיבלנו ש- $r(\bar{L}) \leq r(L)$. נחזור על אותו טיעון בדיוק עבור השפה $\bar{L}$ ונקבל $r(\bar{\bar{L}}) \leq r(\bar{L})$ ומכאן ש- $r(L) = r(\bar{L})$.

ב. יהיו L_1 ו- L_2 שפות רגולריות. אזי, $r(L_1 \cap L_2) \leq r(L_1) \cdot r(L_2)$.

הטענה נכונה. ממשפט מיהיל-נרוד, קיים אס"ד M_1 בעל $r(L_1)$ מצבים המקבל את L_1 ו קיים אס"ד M_2 בעל $r(L_2)$ מצבים המקבל את L_2. ראינו בכיתה כי ניתן לבנות את אוטומט מכפלה של M_1 ו- M_2 בעל $r(L_1) \cdot r(L_2)$ מצבים המקבל את $L_1 \cap L_2$. אם כך, באוטומט מינימלי ל- $L_1 \cap L_2$ יהיו לכל היותר $r(L_1) \cdot r(L_2)$ מצבים, דהיינו $r(L_1 \cap L_2) \leq r(L_1) \cdot r(L_2)$ (שוב ממשפט מיהיל-נרוד).

ג. תהא L שפה רגולרית מעל א"ב Σ ויהא $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ האוטומט שנבנה עבור L בהוכחה של משפט מיהיל-נרוד. אזי, לכל אוטומט א"ד (NFA) $N = (Q', \Sigma, \delta', S, F')$ כך ש- $L(N) = L$ מתקיים ש- $|Q| \leq |Q'|$.

הטענה לא נכונה. האוטומט שנבנה בהוכחה הוא אס"ד בעל מספר מצבים מינימלי – כמספר מחלקות השקילות של היחס. קל לראות שעבור השפה $L = \{01\}$ מספר זה הוא 4. יחד עם זאת, קיים NFA בעל 3 מצבים המקבל את השפה.